# técnica

397 associação dos estudantes do instituto superior técnico
abril 1970 revista de engenharia

# HELIAÇO

**VARÕES DE AÇO DE ALTA RESISTÊNCIA PARA BETÃO ARMADO TIPO A. 40**
**(«Heliaço» e «SNT 40»)**

**TENSÕES DE SEGURANÇA**
Ra = 2400 kg/cm²
e
Ra = 4000 kg/cm² (SISMOS)

**Literatura e Tabelas de Cálculo fornecidas gratuitamente**

## HELIAÇO, LDA.

R. DE S. JULIÃO, 41, 4.º D. — LISBOA

**Tel.: 36 78 17 - 32 37 06 - 36 94 77**

# Fenner

REDUTORES DE VELOCIDADE
TIPO «PONTA DE VEIO»

mais de cem anos de progresso dos maiores fabricantes ingleses

REPRESENTANTES EXCLUSIVOS:
**AUTO-LUSITANIA**
ALFREDO DUARTE L.da
AV. DA LIBERDADE 73-77 LISBOA

# 10.000 obras realizadas

- coberturas
- perfis especiais
- vigas pré-esforçadas
- pavimento trief
- protecção de segurança
- mosaicos
- tubos

**materiais novobra**

## PAVIMENTOS

EM BETÃO PRÉ-ESFORÇADOS (HOMOLOGADOS PELO LAB. NAC. DE ENGENHARIA CIVIL)

**LEIRIA** — PONTE DAS MESTRAS — TEL. 2 37 68
**LISBOA** — AV. EST. UNIDOS DA AMERICA, 100, 5.º, Dto — TEL. 77 18 03 - 77 68 32
**LAGOA** — ESTRADA DO CARMO — TEL. 94

# CIMENTO SECIL

**Fábrica:**
Outão — Setúbal
**Telef. 228824/5**

**Escritório:**
R. do Comércio, 56-3.º
**LISBOA 2**
**Telef. 328201/2/3**

BIBLIOTECA DO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA LISBOA

OFERTA

# técnica

NUMERO 397 ABRIL DE 1970 ANO XLV VOLUME XXXII PUBLICAÇÃO MENSAL

**Director**

João Soares Alves

**Administrador**

Silvério de Sousa Mendes

**Secretário**

Rui Coutinho Torrinha

**Chefe de Redacção**

Vladimiro de Oliveira

**Redactores**

Alvaro Manuel Cortez
Francisco Toco Emílio
Henrique Nunes Garcia
Maria Manuela Mota

**Assinaturas**

| | | 5 Nos. | 10 Nos. |
|---|---|---|---|
| Continente e ilhas | — | 85$00 | 160$00 |
| Ultramar, Brasil e Espanha | — | 95$00 | 170$00 |
| Estrangeiro | — | | 180$00 |

**Número avulso — 25$00**

Não se publica em Agosto e Setembro.

Os artigos assinados são da exclusiva responsabilidade dos seus autores.

*Composto e impresso na Tipografia Jorge Fernandes, Lda. — Rua da Cruz dos Poiais 103 — Lisboa*

## SUMÁRIO

**329** *LAGINHA SERAFIM, CALDEIRA RODRIGUES, PORTELA DOS SANTOS E MÁRIO MILHO* — **O método de ajustamento completo para o cálculo de barragens abóbada.**

Complet adjusttment method for analysing arch dams.

**343** *DUARTE-RAMOS* — **Linhas polifásicas uniformes e lineares em funcionamento sinusoidal permanente equilibrado. II — Simetria, passividade e reciprocidade.**

Study of linear homogeneous polyphase transmission lines by balenced steady-state sinusoidal regime. II — Symmetry, passivity and reciprocality.

**439** *DINÍS DA GAMA* — **Computer calculations of stresses and rock failure analysis in some blasting situations.**

Computação de tensões e análise da rotura de rochas em situações de arranque com explosivos.

**367** *HELDER COELHO* — **Desenho de um conversor binário-decimal.**

Desing of a binary decimal converter.

**371** **Vida Escolar e Associativa**

Luís Fernando Monteiro — Autómatos Finitos.

**381** **Do mundo técnico**

Aparelho industrial de raio X — Mininterruptor hermético subminiatura — Canon pocketronic.

**385** **Bibliografia**

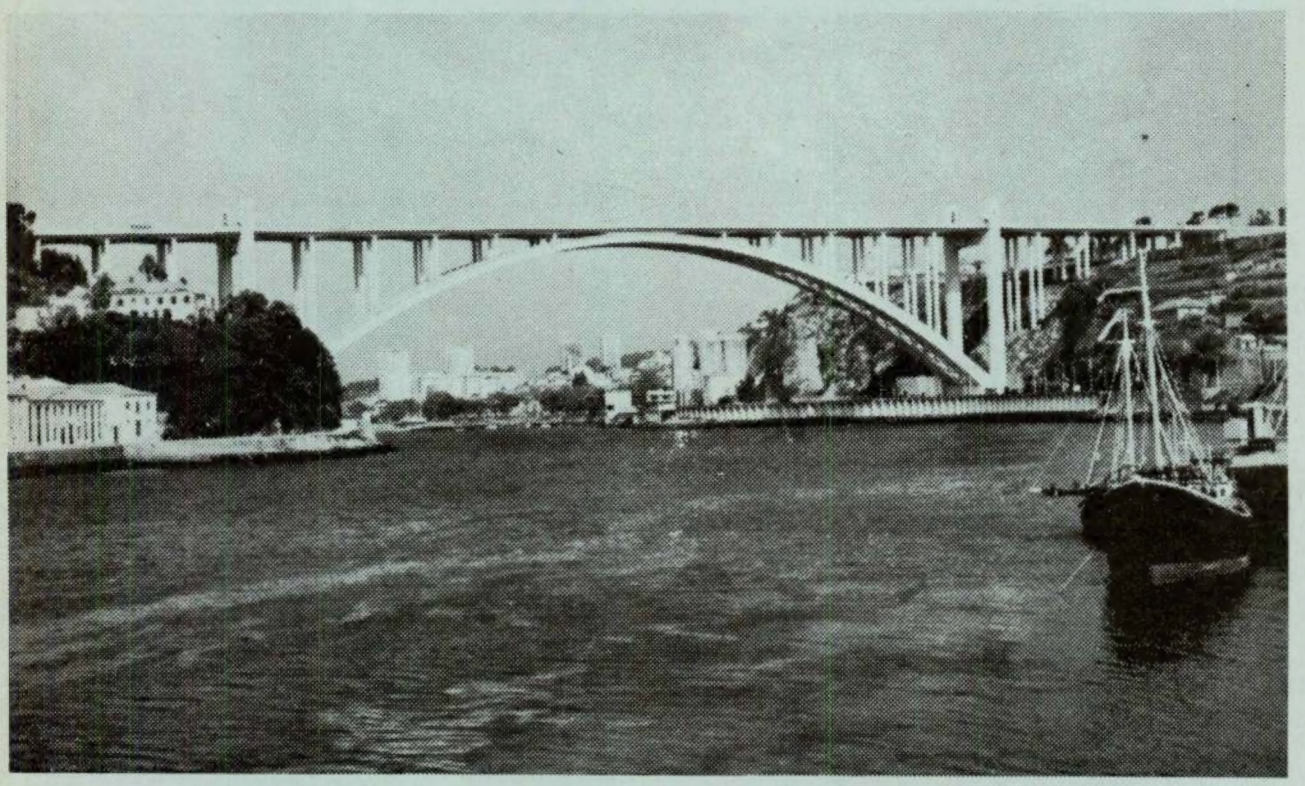
CAPA: Aspecto parcial das instalações fabris da nova fábrica de relés telegráficos, da Siemens, em Évora.

# ÍNDICE ALFABÉTICO DOS ANUNCIANTES


| | Pág. |
|---|---|
| A. Johnson & Co (Portugal), Ltd. | XXXII |
| Auto-Lusitânia | 2.ª da capa |
| Centro Técnico Hospitalar | XXV |
| Cimento Secil | 2.ª da capa |
| Cimianto | IV |
| Companhia de Cimentos Brancos | VI |
| Cometna | XV |
| Construções Técnicas | XVII |
| Construções Schréder | XX |
| Electro-Arco, Lda. | II |
| Empresa de Cimentos de Leiria | XXIV |
| Empresa Electro Cerâmica | XXIX |
| Empresa de Produtos Asfálticos | X |
| Empresa de Sondagens e Fundações Teixeira Duarte, Lda. | 3.ª da capa |
| Empresa Técnica de Equipamentos Eléctricos | XI |
| Empresa Ultramarina de Sondagens e Fundações | XVI |
| Engil | XXXVII |
| Fanafel | XVI |
| Fundações Franki, Lda. | I |
| Guedes & Almeida, Lda. | VIII e XXVI |
| Heliaço | 2.ª da capa |
| Hidrel | XXVII |
| Isolux | XXVI |
| Jayme da Costa, Lda. | XIX |
| Johann Keller | IV |
| J. F. Azevedo e Silva | VII |
| J. Roma | IV |
| Livros Técnicos | XV e XXVIII |
| MAGUE | XIII |
| Mendes de Almeida, S. A. R. L. | XXI |
| Novobra, Lda. | 2.ª da capa |
| Philips Portuguesa | V |
| Rotring | XXX |
| Setal | XXVII |
| Siemens | XII |
| Soc. Electricidade Brown Boveri | 4.ª da capa |
| Soc. Amadeu Gaudêncio | XXIX |
| Sociedade Portuguesa Cavan | VI |
| Soc. S. K. F. Lda. | XXII |
| Sondagens e Fundações A. Cavaco | II |
| Sondagens Ródio, Lda. | XXVII |
| Sopecate | II |
| SEPSA | XIV |
| Standard Eléctrica | IX |
| Tudor | XXIII |
| Wild Portugal, Lda. | III |

espiral

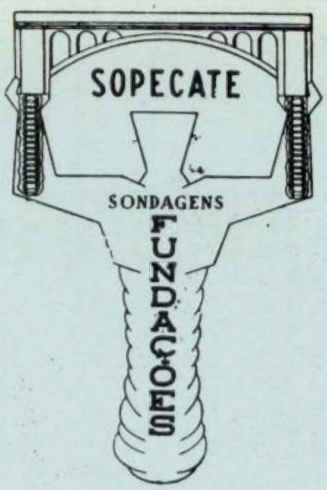
# na base da construção moderna: estacas FRANKI, moldadas no solo.



A elevada gama de diâmetros das estacas Franki permite a melhor adaptação a cada problema concreto de fundações, desde a construção mais ligeira até à de grande concentração de cargas muito elevadas. Material permanentemente actualizado e pessoal com especialização constantemente aprofundada garantem a segurança, rapidez e economia das fundações executadas.

**FRANKI**

**Consulte-nos: FUNDAÇÕES FRANKI, LDA. — PORTUGAL**




# sopecate

sondagens - fundações

**ESCRITÓRIO:** RUA DO ARSENAL 146 2.º TELEFONES 3 40 10 - 32 02 08 LISBOA

- ESTUDOS, PESQUISAS E CAPTAÇÕES DE ÁGUA
- SONDAGENS
- REBAIXAMENTO DE NÍVEIS AQUÍFEROS
- FUNDAÇÕES

SONDAGENS E FUNDAÇÕES A. CAVACO, LDA.

R. RODRIGO DA FONSECA, 62, R/C ESQ. — LISBOA - 1

TELEF. 56 11 71/72/73

# ELECTRO-ARCO, L.DA

**ELÉCTRODOS ✦ POSTOS ✦ ACESSÓRIOS**

PARA A SOLDADURA ELÉCTRICA

*

MATERIAL APROVADO PELOS

LLOYD'S REGISTER OF SHIPPING
BUREAU VERITAS
GERMANISCHER LLOYD

—

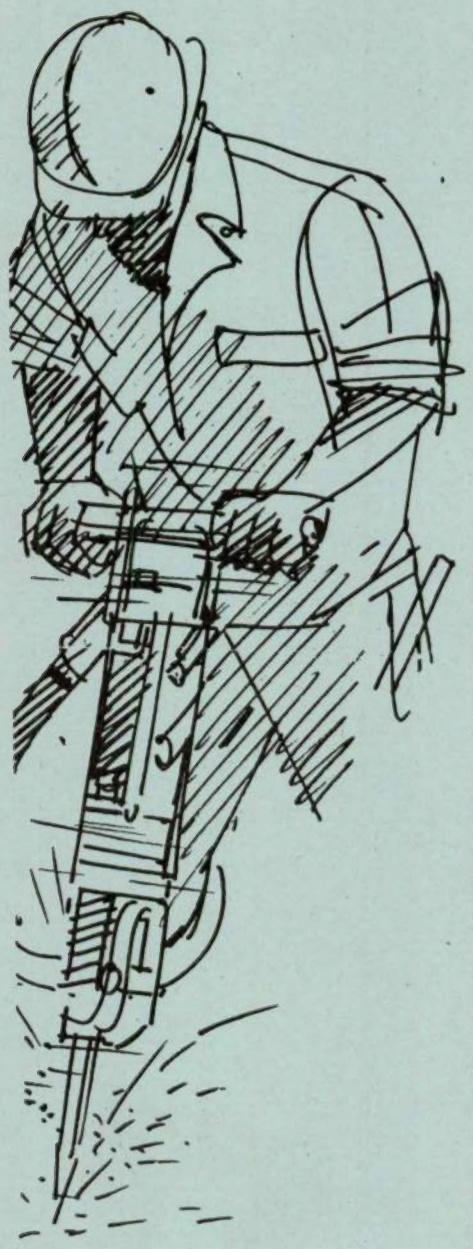
LISBOA
Rua Silva Carvalho, 239
Tels. 68 36 49 - 68 48 93

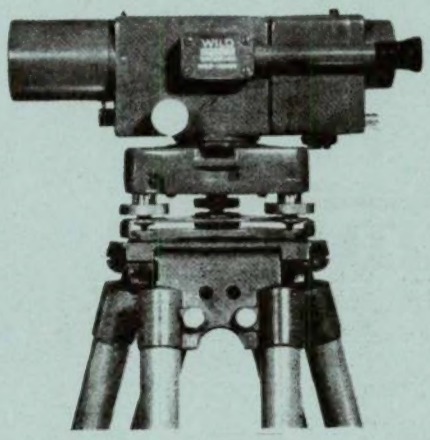
FÁBRICA E LABORATÓRIOS
Venda Nova — Amadora
Tels. 97 06 13 - 97 17 33

PORTO
Rua do Bolhão, 216
Tel. 2 12 77 - 39 44 73

# Inabalável

## é o nosso novo compensador





**no nível automático para engenheiro WILD NA 2**

Amortecedor eficiente para vento e vibrações do solo

Suspensão robusta do pêndulo

Além disso o novo

**Botão de controlo do funcionamento**

Dispensa de bater no tripé ou no instrumento

Acessório sob pedido:
Micrómetro de lâminas de faces plano-paralelas para nivelamentos de grande precisão.
Imagem direita de observação de grande nitidez

**Modelo NAK 2**
**com círculo de vidro**

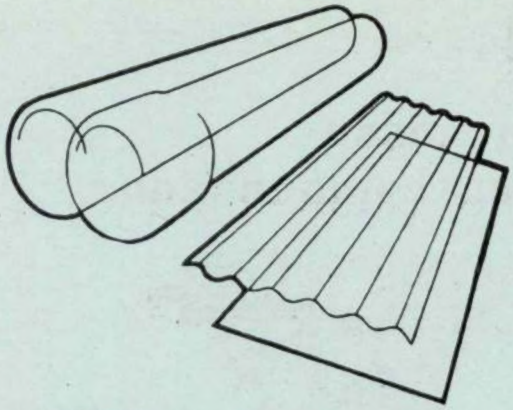
**WILD**
HEERBRUGG

Representantes exclusivos:

**WILD PORTUGAL, LDA.**

PRAÇA DAS ÁGUAS LIVRES, 8
LISBOA-2 — TELEFONE 68 91 12

FIBROCIMENTO



Cimianto

TUBAGEM PARA ESGOTOS
E PARA ÁGUAS SOB E SEM PRESSÃO
CHAPAS LISAS E ONDULADAS
PEÇAS MOLDADAS E ACESSÓRIOS

MOSAICOS HIDRÁULICOS

**CIMIANTO — Soc. Técnica de Hidrálica, S.A.R.L.**
Av. Fontes Pereira de Melo, 14 - Tel. 531161, 560161 - Lisboa

TABELAS PARA O CÁLCULO DE BETÃO ARMADO

por

Brazão Farinha e Mexia Heitor

**A APARECER BREVEMENTE**

PEDIDOS À

técnica

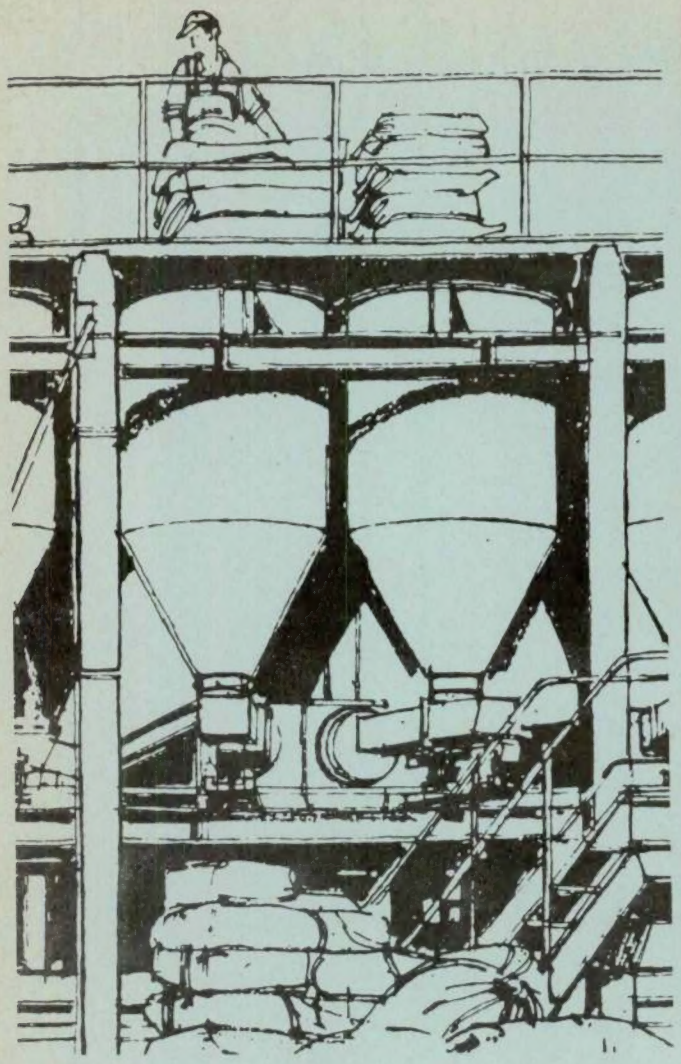
- SOLDADURA ELÉCTRICA
- MATERIAL DE PROTECÇÃO

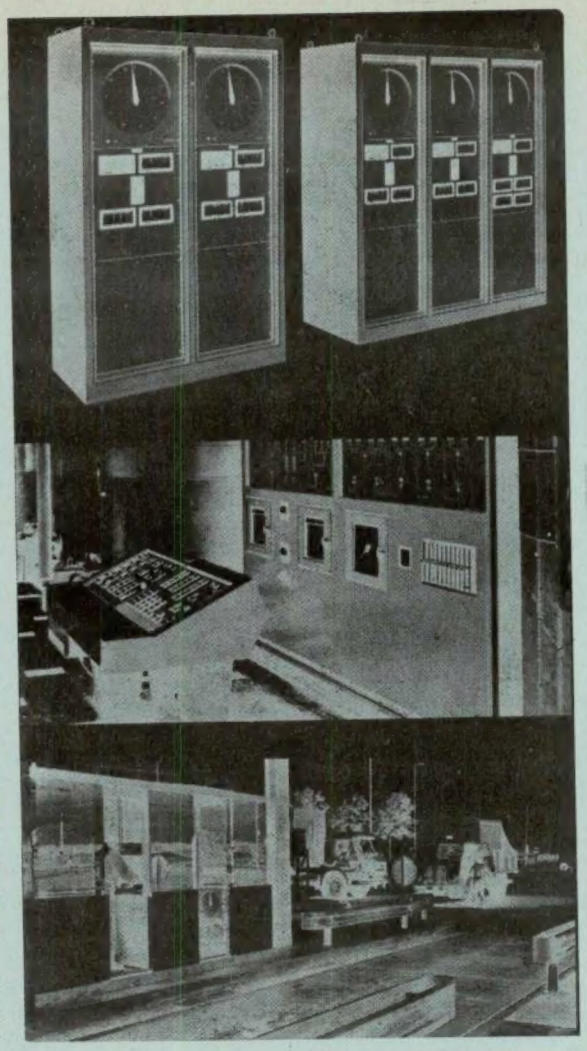
**Aparelhagem de medidas eléctricas**

- indicadora
- reguladora
- registadora

J. ROMA, L.DA

P. da Figueira, 12, 1.° LISBOA Tel. 865151
P. do Município, 309-6.° S/3 PORTO Tel. 0236732





# Mais de 5000 instalações de pesagem electrónica

em uso em todo o mundo foram concebidas e realizadas pelos engenheiros da Philips. Muitas trabalham em meios ambientes altamente agressivos — que fariam fracassar qualquer sistema de pesagem mecânica se alguém tivesse a ideia de os fazer trabalhar em tais condições.

Os sistemas de pesagem electrónica Philips são estanques ao pó e à humidade e insensíveis ao choque e às vibrações. Têm uma vida pràticamente ilimitada, mantendo-se a sua precisão ao longo do tempo. As células de pesagem, devido às suas reduzidas dimensões, tornam muito fácil a montagem mesmo em espaços exíguos.

Não requerendo as alavancas normalmente usadas na pesagem mecânica, a pesagem electrónica poupa espaço e dinheiro, dadb que não exige fundações caras.

As ligações entre as células de pesagem e o aparelho indicador fazem-se por meio de cabos eléctricos o que permite tornar a posição daquele independente do local da pesagem.

O equipamento de pesagem Philips é de concepção modular possuindo entrada e saída digitais.

Se necessitar de um sistema de pesagem em plataforma, em tanques ou silos, em telas transportadoras ou de um equipamento para doseamento automático de produtos, peça informação detalhada à

**DEPTº INDÚSTRIA**

**PHILIPS**

---

**PHILIPS PORTUGUESA, S.A.R.L.**

AV. DUARTE PACHECO, 6 - LISBOA - TELEFS. 65 45 21/8 • RUA FERNANDES TOMÁS, 760-764 - PORTO - TELEFS. 2 74 47/8/9

# O EMPREGO DO CIMENTO BRANCO...

**permite acabamentos mais perfeitos, mais duradouros e muito mais económicos**

**Estude a vantagem do emprego do**

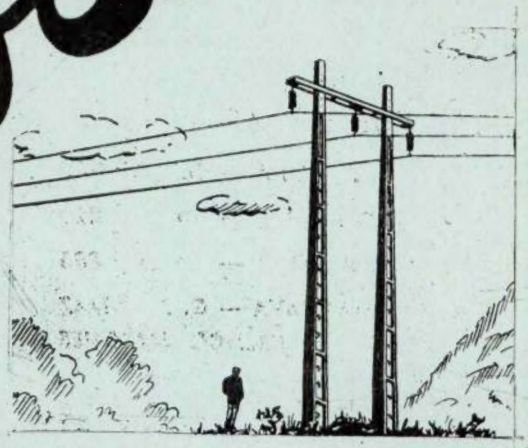
## CIMENTO BRANCO LUSO

**Consulte os distribuidores gerais**

No Sul: **SCIAL** — T. do Corpo Santo, 15 — Telef. 32 73 77 — Lisboa
No Norte: **SCIAL** — R. do Bonjardim, 205 — Telef. 2 5779 — Porto

POSTES DE BETÃO PARA LINHAS ELÉCTRICAS
MOSAICOS E AZULEJOS
COLUNAS PARA ILUMINAÇÃO PÚBLICA
MANILHAS PARA ESGOTOS

SOCIEDADE PORTUGUESA **Carvam**



RUA D. ESTEFÂNIA, 94-A-LISBOA-1 - TELEF. 47812-50129

# JF

## colaborou em mais um grandioso empreendimento

## EXECUTANDO A INSTALAÇÃO ELÉCTRICA DE:

* iluminação
* tomadas
* força motriz
* ar condicionado
* telefones
* relógios eléctricos
* som
* letreiros luminosos
* detecção de incêndios
* alarme contra roubo
* sinalização de trânsito
* posto de transformação
* central de emergência

**FORNECENDO E MONTANDO TODOS OS QUADROS BEM COMO APARELHAGEM DAS SUAS REPRESENTADAS WESSEL E LEGRAND**

JF

J. F. DE AZEVEDO E SILVA & C.ª, L.DA
Rua S. Francisco de Sales, 2 — Telefone 65 41 65 — Lisboa 1

WABCO

WESTINGHOUSE
AIR BRAKE COMPANY
Construction Equipment Division
Peoria (Illinois) 61601

# MOTO-SCRAPERS AUTO-CARREGADORES

CAPACIDADE DE 11, 21 E 31 JARDAS CÚBICAS

NÃO NECESSITA DE TRACTOR PARA EMPURRE!
UMA SÓ MÁQUINA... UM SÓ OPERADOR...

**Escarifica... Carrega... Transporta... Descarrega... Em terrenos de toda a natureza!**

DISTRIBUIDOR EXCLUSIVO

## GUEDES & ALMEIDA LDA.

**Rua Áurea, 181-2.º — LISBOA-2 — TELEFS. 32 50 80 • 32 78 45**

# A STANDARD ELÉCTRICA PROJECTA-SE NO MUNDO

Na vanguarda da indústria das Telecomunicações e Electrónica, a Standard Eléctrica, dimensionada ao âmbito mundial, ocupa uma prestigiosa posição nos mercados estrangeiros. A eficiência de uma administração actualizada, a capacidade técnica dos seus engenheiros e o profissionalismo com que todos os empregados encaram as suas responsabilidades, são valores reais e positivos que, de maneira decisiva, contribuem para o engrandecimento da Standard Eléctrica e da indústria nacional. Associada da International Telephone and Telegraph Corporation, um conjunto mundial com cerca de 200 fábricas localizadas em mais de 60 paises, a Standard Eléctrica fabrica numerosos produtos, desde os minúsculos transistores e circuitos integrados às grandes centrais telefónicas de serviço público, que são exportados para mais de 30 paises entre os quais se destacam: Inglaterra, França, Alemanha, Espanha, Suécia, África do Sul, Brasil e Estados Unidos da América do Norte.

**Standard Eléctrica** **ITT**

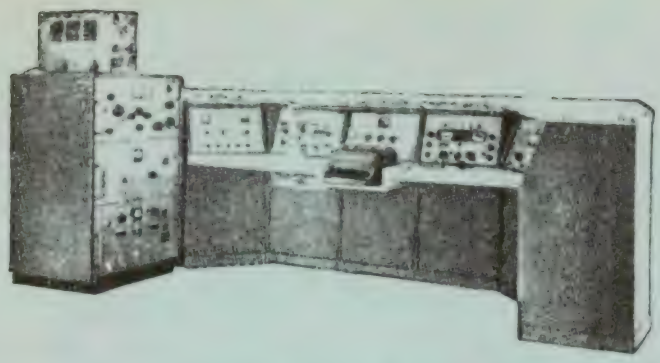
TG

PARA COLAGEM DE TACOS DE MADEIRA USE:

*Também próprio para:*
*impermeabilizar terrenos,*
*paredes, fundações, etc.*

*FÁBRICA EM SACAVÉM*

RUA FILIPE FOLQUE-10 1º— LISBOA
TELEF. 53 01 56 —TELEG. EPALDA-LISBOA



## Comunicações

**equipamentos**
**e sistemas completos**

- Cuidadosamente projectados
- Amplamente experimentados
- Completamente integrados

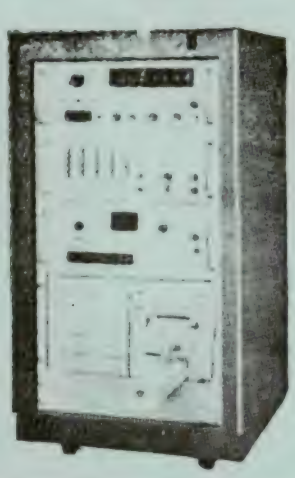
**THE TECHNICAL MATERIEL CORPORATION**

**HEWLETT hp PACKARD**

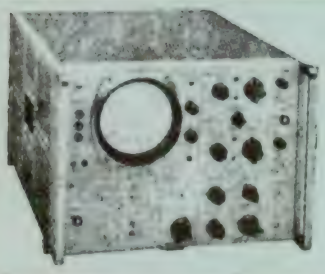
**aparelhagem electrónica de medida e registo**

Osciloscópios, Oscilógrafos, Voltímetros electrónicos, Geradores de sinal, Contadores electrónicos, Registadores digitais, Fontes de alimentação

Registador digital



Registador Sanborn



Osciloscópio HP

Contador Electrónico HP

**TELECTRA** EMPRESA TECNICA DE EQUIPAMENTOS ELECTRICOS, S.A.R.L.

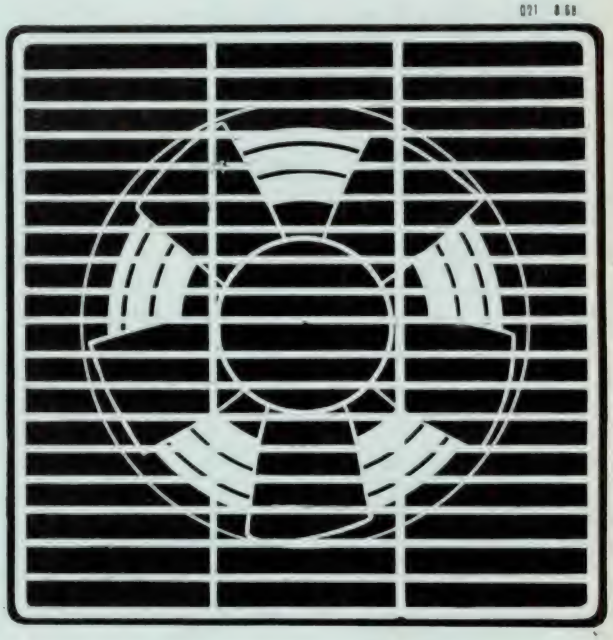
SIEMENS

# VENTILAR

Quando se deseja uma atmosfera fresca e agradável, o ar precisa ser renovado e essencialmente nos locais de ambiente viciado ou com grande concentração de pessoas.

O ventilador Siemens tipo 2CB2 foi especialmente estudado para montagem em cozinhas e a sua aplicação pode ser efectuada por pessoal não especializado.

A Siemens inclui no seu programa de fabrico ventiladores do tipo doméstico e industrial, cujas características de funcionamento permitem a sua utilização em todos os casos em que é necessário ar fresco e saudável.



Peça catálogos ou esclarecimentos à Secção Técnica da

**SIEMENS-COMPANHIA DE ELECTRICIDADE, S. A. R. L.**

LISBOA-1: AV. ALMIRANTE REIS, 65 — TEL. 53 69 21 • PORTO: R. DAS CARMELITAS, 26-2.º — TEL. 2 89 43

técnica

NÚMERO 397 ABRIL DE 1970 ANO XLVI VOLUME XXXII PUBLICAÇÃO MENSAL

C. D. U. 627.825 : 627.824

# O MÉTODO DE AJUSTAMENTO COMPLETO PARA O CÁLCULO DE BARRAGENS ABÓBADA

Por J. LAGINHA SERAFIM
J. CALDEIRA RODRIGUES
ALFREDO PORTELA DOS SANTOS
MÁRIO JORGE MILHO
Engenheiros civis (IST) — COBA

RESUMO

*No método de ajustamento completo considera-se a barragem dividida em dois sistemas de elementos — arcos e consolas — que são formados por aduelas. Nas aduelas de cruzamento de arcos e consolas são consideradas todas as forças, internas e externas, e estabelece-se o conjunto completo das equações de equilíbrio. São consideradas, também, as três componentes do deslocamento linear e as seis rotações sofridas pelas normais às faces de cada aduela. Mostra-se que, por razões de continuidade e equilíbrio das tensões de corte, as torções segundo os eixos horizontal e vertical não são independentes e que os deslocamentos horizontais tangenciais e os verticais devem ser considerados simultâneamente*

*As forças internas são obtidas pela resolução de um sistema de equações de compatibilidade que exprimem a igualdade dos deslocamentos em todas as aduelas de cruzamento de arcos e consolas. Ambos os sistemas de elementos são analisados para forças triangulares unitárias, para as quais se determinam os respectivos coeficientes de influência. Utiliza-se uma formulação matricial para o cálculo dos arcos e uma fórmula geral para as consolas. O método pode ser usado em computadores de capacidade média.*

*Os resultados obtidos pela aplicação do método a duas barragens tipo, foram comparados com os obtidos por métodos britânicos recentemente desenvolvidos.*

*Apresenta-se também comparações com resultados de ensaios em modelo. A concordância é excelente.*

SYNOPSIS

*The method considers the arch dam divided in two systems of elements — arches and cantilevers — which are formed by voussoirs. In the voussoirs of crossing of arches and cantilevers all the internal forces and external loads are considered and the complete set of equations of equilibrium is established. The three components of linear displacements and the six rotations of the normals to the faces are considered. For reasons of continuity and of equilibrium of shear stresses it is shown that the torsions of horizontal and vertical axes are not independent and that the vertical and tangential displacements must be taken simultaneously.*

*The internal forces are obtained by solving a system of equations of compatibility, expressing equal displacement at the crossing of arches and cantilevers. Both systems of elements are analysed for triangular unit loads, for which the coefficients of influence of the various displacements are determined. A matrix formulation for the arches and a general formula for the cantilevers are used. The method can be used in medium size computers.*

*The results obtained by the application of the method to two test dams are compared with those of recently developed British methods. Also comparisons with results of model tests are presented. The agreement obtained is excellent.*

## 0. NOTAÇÃO

Usam-se os seguintes símbolos neste trabalho:

$A_i$, $C_i$, $D_i$, $h_{fi}$ = matrizes que exprimem os deslocamentos devidos às cargas actuantes na aduela;

$B_{ij}$ = matriz de transformação dos esforços unitários na secção j de um arco em esforços na secção i;

$d_j$ = distância do centro de gravidade ao paramento de montante na secção j da consola;

$E, G$ = módulo de elasticidade (Young) e módulo de elasticidade transversal;

$E_i$ = matriz que exprime as forças devidas às cargas unitárias distribuídas;

$e_j$ = espessura na secção j;

$F, H, L$ = funções definidas pela Eq 45 usada na fórmula para os deslocamentos das consolas;

$I, I_j$ = momentos de inércia;

$i$ = tangente do ângulo entre a linha dos centros das consolas e a direcção vertical;

$K$ = relação de distorção devida ao corte (normalmente $K = 1{,}5$);

$k_{ji}, k_{ju}, k_j$ = coeficientes de influência das cargas unitárias nos deslocamentos dos arcos ou das consolas;

$l_i, l_i'$ = coeficientes que representam a grandeza na aduela da carga triangular unitária;

$M, M_x, M_y$ = momentos flectores;

$M_b$ = momento flector na base da consola devido à subpressão;

$M_{xy}, M_{yx}, M_t$ = momentos de torção;

$m$ = momentos devidos ao peso e à componente vertical de pressão hidrostática;

$m_x, m_y$ = forças de flexão derivadas do momento de torção $M_t$;

$m'_x$ = força de flexão definida pela Eq. 10;

$N, N_j, N_x, N_y$ = forças internas normais;

$N_b$ = impulsão na base da consola devida à subpressão;

$N_{xy}, N_{yx}, T$ = forças de corte ou esforços transversos;

$Q, Q_x, Q_y$ = esforços transversos radiais ou forças de corte internas radiais;

$p$ = peso da barragem mais componente vertical da pressão hidrostática;

$q$ = componente horizontal da pressão hidrostática;

$q_a, q_c = (q - q_a)$ = forças fictícias radiais para arcos e consolas;

$R$ = raio horizontal de curvatura da superfície média;

$R_u, R_{uj}$ = raio horizontal no paramento de montante;

$S_j$ = área da secção j das consolas;

$t_x, t_y$ = derivadas das forças de corte ou forças internas normais;

$U_j$ = carga triangular unitária na secção j;

$U, V, W$ = deslocamentos tangenciais, verticais e radiais;

$U_a, V_a, W_a$ = deslocamentos dos arcos;

$U_c, V_c, W_c$ = deslocamentos das consolas;

$x, y, z$ = coordenadas rectangulares;

$y_j$ = distância vertical desde o coroamento até à secção j;

$z_j$ = distância da face de montante à superfície de referência;

$\alpha_o, \beta_o, \gamma_o, \delta_o, \varepsilon_o$ = características elásticas da fundação definidas pela Eq. 38;

$\beta_x, \beta_y$ = deformações angulares devidas ao momento flector entre as faces verticais dos arcos e as faces horizontais das consolas;

$\gamma$ = distorções entre as faces das aduelas;

$\delta_x, \delta_y$ = distorções radiais por corte nas faces horizontais e verticais da aduela;

$\varepsilon_x, \varepsilon_y$ = deformações lineares entre duas faces opostas de uma aduela;

$\gamma_t$ = distorção devida ao esforço transverso definido pela Eq. 8;

$\theta_a, \theta_c$ = rotações de eixo vertical dos arcos e das consolas;

$\upsilon$ = coeficiente Poisson;

$\tau_u, \tau_s, \tau_a$ = tensões tangenciais no paramento de montante, no paramento de jusante e no centro da secção da aduela;

$\psi_{nm}$ = rotação do eixo nn em torno do eixo mm;

$\phi, \phi_j$ = ângulo horizontal entre o eixo da aduela e o eixo da barragem;

$\omega, \omega_x, \omega_y$ = torções das faces da aduela.

## 1. INTRODUÇÃO

Nas condições económicas actualmente existentes é cada vez maior o interesse pela construção de grandes barragens para rega, aproveitamentos hidroeléctricos, abastecimentos de água e controle de cheias. São muitas as regiões pobres do mundo que podem aspirar a desenvolver-se se os seus rios forem regulados e controladas as suas cheias.

Ainda que nos países mais desenvolvidos se estejam actualmente construindo menos barragens, em grande parte porque os melhores sítios já foram usados e a energia hidroeléctrica está explorada quase completamente, verifica-se um incremento na construção de barragens em todo o mundo. A estatística das barragens muito altas existentes (acima de 150 metros de altura), que se apresentam na Fig. 1, demonstra que as barragens de betão, e muito especialmente dos tipos em abóbada e em casca, têm sido as usualmente escolhidas para vales profundos e para muito grandes empreendimentos [2]. O problema estático destas barragens é muito complexo e a determinação teórica do campo de tensões nestas estruturas e nas suas fundações tem sido sempre considerado pelos engenheiros civis como um dos problemas mais interessantes da teoria da elasticidade e da teoria

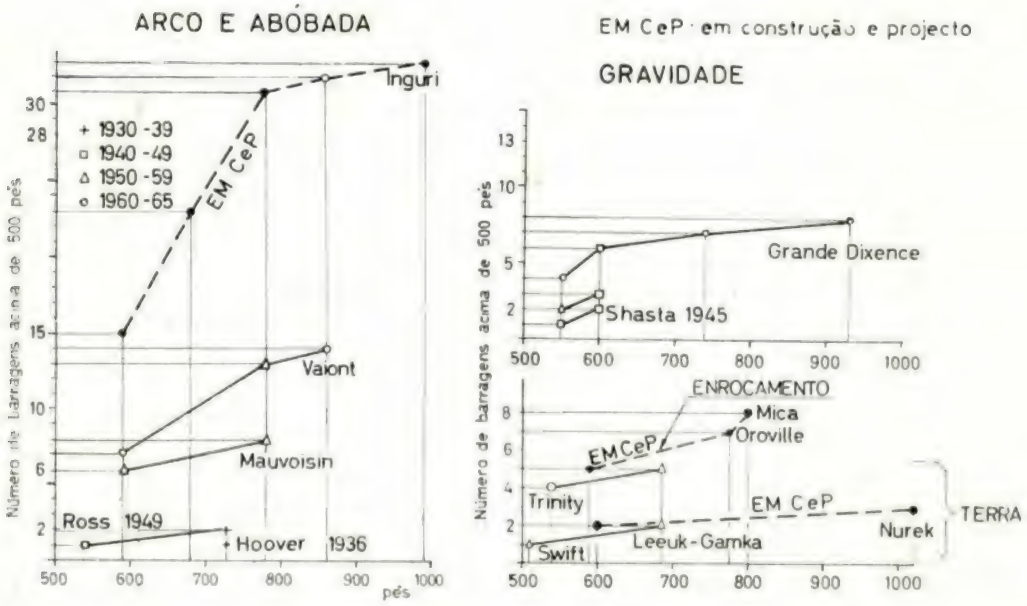



Fig. 1 — Número e altura de Barragens acima de 500 pés (150 m) por décadas (segundo o Registo Mundial de Barragens ICOLD — 1965)

das cascas. Nas últimas décadas (especialmente nos anos cinquenta) este facto deu lugar ao uso muito generalizado dos modelos para ajudar os engenheiros a conhecer correctamente o campo das tensões nas estruturas que projectam [3]. Com o desenvolvimento dos computadores, não só os métodos matemáticos existentes, que exigem um trabalho numérico muito longo, se tornaram mais divulgados e aperfeiçoados, como também em muitos centros de investigação de todo o mundo foram imaginados e postos em prática novos métodos para o cálculo de barragens arco com bases completamente novas. Estudos, prèviamente programados e organizados em vários países, e em especial nas universidades britânicas [5], deram como resultado que se obteve, na engenharia civil, algo de bastante importante e único — que é poder dispor de métodos exactos e completos para a determinação de tensões nas barragens abóbada e nas suas fundações.

Estes métodos dividem-se em três categorias: (1) métodos de arcos-consolas (dos quais o mais desenvolvido foi o «trial-load» [6]); (2) métodos baseados na teoria das cascas (o mais conhecido é o método de Tolke); (3) métodos numéricos baseados na teoria da elasticidade tridimensional (o mais notável destes últimos foi o método da relaxação dinâmica, aplicado ao cálculo da barragem de Donkan [8]). Pode dizer-se que em 1968, como consequência do aperfeiçoamento de muitos destes métodos, se podem obter valores coincidentes quer para as tensões quer para os deslocamentos. A maior parte destes métodos pode também ser usada para barragens de dupla curvatura de qualquer forma, apoiadas em fundações deformáveis.

Este trabalho indica as bases de um método que realiza a síntese entre o primeiro e o segundo grupo atrás referidos, isto é, recorre ao artifício de analisar «arcos» e «consolas», mas como porções da casca que efectivamente é a forma indivisível da barragem. O método inspira-se nas equacões da Teoria das Cascas que, mesmo quando se analisam separadamente «arcos» e «consolas», respeita com grande aproximação. São absolutamente satisfeitas as equações de equilíbrio considerando todas as tensões integradas em esforços (esforços normais, esforços transversos, momentos flectores e de torção) como simplificações aceites na Resistência dos Materiais e recorre-se a equações de compatibilidade, algumas sob a forma de ajustamentos entre «arcos» e «consolas». Chamou-se-lhe «Método de Ajustamento Completo» em réplica ao «trial load» e a outros métodos de ajustamento que o não são completamente, mas é também um método de resolução das equações diferenciais da Teoria das Cascas, embora não por integração directa de todas as equações, como tem sido tentado por vários autores.

Apresentam-se ao longo do trabalho comparações com resultados de tensões e deslocamentos obtidos por outros métodos (especialmente os de terceiro grupo) ùltimamente apresentados no Simpósio de Barragens-Arco, realizado em Londres [5]. Também se apresentam resultados da aplicação do método de ajustamento completo a algumas barragens recentemente projectadas, ao mesmo tempo que os valores obtidos em ensaios de modelos dessas mesmas barragens. Como se verá, os resultados dessas comparações apresentam concordância notável.

Ainda que este método tenha sido desenvolvido para barragens abóbada e em casca, ele pode ser usado para o estudo de qualquer corpo contínuo delgado analisando um número restrito de elementos discretos, e pode ser aplicado ao estudo de cascas de forma complexa com espessuras variáveis. O método tem a vantagem de ser fácil de aplicar e de permitir o uso de computadores de capacidade média.

## 2 — O MÉTODO DE AJUSTAMENTO COMPLETO

O método baseia-se antes de tudo na Teoria das Cascas e, depois, no conceito muito comummente usado da divisão da barragem em dois sistemas de elementos lineares livres: um sistema de elementos horizontais (os arcos) e outro sistema de elementos ortogonais aos primeiros (as consolas). O ajustamento completo dos deslocamentos dos elementos de um sistema com os deslocamentos dos outros elementos do outro sistema, permitirá, em complemento a outras considerações impostas pela Teoria das Cascas, uma determinação correcta das tensões principais na barragem dentro das aproximações habituais na engenharia obtidas através da Resistência de Materiais.

Na análise separada dos arcos e das consolas

entram em jogo todos os esforços actuantes na casca, de que aqueles elementos, arcos ou consolas, são simples fatias que justapostas a integram. No cálculo dos deslocamentos a ajustar (nem todos são calculados, por ser desnecessário como se verá) considera-se a contribuição de todos os esforços internos da casca. Os esforços considerados nas secções e nas faces justapostas dos «arcos» e das «consolas» são todos os esforços internos da casca.

Nas aplicações da Teoria das Cascas é frequente admitir-se, como simplificação, que os segmentos de recta normais à superfície média da casca se conservam normais e de comprimento indeformado (hipótese de Kirchhoff). Com as espessuras atingidas nas barragens não é mais admissível tal simplificação, e o presente método não a admite senão na conservação do comprimento indeformável, admitindo que a pressão hidrostática não actua no paramento de montante, mas sim na superfície média.

Deixou-se para ulterior desenvolvimento a consideração do efeito de Poisson, que convirá considerar no apuramento do método.

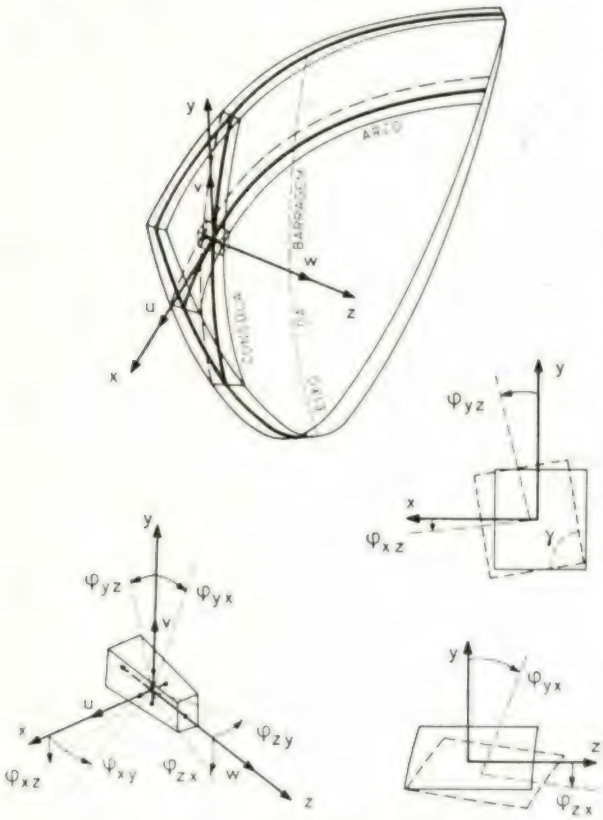



Fig. 2 — Elementos arco e consola. Deslocamentos e rotações de uma aduela

Os arcos são elementos horizontais apoiados numa fundação deformável. Eles são definidos (Fig. 2) como uma porção de casca compreendida entre dois planos horizontais separados por uma distância muito pequena (e unitária) na direcção vertical. Esta definição, ainda que não seja perfeitamente adaptável a barragens arco ou abóbada de dupla curvatura, simplifica o problema geométrico uma vez que as formas destas barragens são definidas por linhas de nível. As consolas são elementos ortogonais aos arcos, também apoiados numa fundação deformável. Quando a curvatura da barragem é diferente a cada nível, as consolas são elementos torcidos que podem ser gerados por segmentos horizontais sempre perpendiculares às linhas de nível da face de montante e seguindo nessa face duas linhas directrizes ortogonais aos arcos distanciados duma pequena distância (e unitária) medida no coroamento da barragem.

Para barragens abóboda de dupla curvatura, os arcos e as consolas poderiam ser tomados como elementos do mesmo tipo, isto é, como elementos torcidos normais ao paramento de montante. Os arcos seriam então um semi-elemento, indo desde cada um dos encontros até ao fecho e seriam definidos por uma porção da casca compreendida entre as duas superfícies geradas por segmentos sempre normais ao paramento de montante e seguindo duas linhas de nível afastadas na vertical duma distância muito pequena (e unitária).

Os arcos ou as consolas podem ser considerados como uma sucessão de aduelas, dispostas em fiadas horizontais ou em fiadas verticais, correspondendo cada aduela à intersecção de um arco com uma consola, quando fossem consideradas sucessões contínuas de elementos, arcos e consolas. Na prática não é necessário considerar uma sucessão contínua de elementos mas apenas alguns arcos e algumas consolas.

O «Método trial load», tal como foi desenvolvido pelo Bureau of Reclamation, toma em consideração as componentes radiais e tangenciais horizontais do deslocamento linear de pontos da superfície média da barragem e rotações de eixo vertical do segmento montante-jusante. Nesse método desprezam-se as componentes verticais do deslocamento, devendo também ser notado que as rotações de eixo horizontal-tangencial não precisam de ser calculadas. Em contrapartida, no método agora apresentado, os movimentos

verticais são considerados completemente, assim como as rotações de eixo horizontal radial. Todavia, uma análise mais completa das deformações e dos deslocamentos revela que, dada a conexão entre umas e outras e a sua dependência em relação às tensões, o problema pode ser simplificado e o número de incógnitas em cada ponto de intersecção dos arcos com as consolas (tanto deslocamentos como esforços internos) pode ser reduzido.

## 3 — ANÁLISE DOS DESCOLAMENTOS E DEFORMAÇÕES

Na Fig. 2 indica-se o sistema de eixos associados com uma aduela. Quando a barragem se deforma por acção das cargas exteriores, o centro de gravidade de cada aduela sofre um deslocamento linear de três componentes U, V e W e, os três eixos perpendiculares normais aos três pares de faces da aduela, sofrem rotações que são expressas por seis componentes:
$\psi_{zx}$ e $\psi_{zy}$ rotações do eixo dos zz em torno do eixo dos xx e do eixo dos yy, $\psi_{yx}$ e $\psi_{yz}$ rotações do eixo dos yy em torno do eixo dos xx e do eixo dos zz, $\psi_{xy}$ e $\psi_{xz}$ rotações do eixo dos xx em torno do eixo dos yy e do eixo dos zz.

Em consequência dos esforços do corte, os três eixos não permanecem perpendiculares depois da deformação e, portanto, as rotações de dois eixos perpendiculares em torno de um terceiro eixo não são iguais, por exemplo, $\psi_{yx} \neq \psi_{zx}$ (Fig. 2).

Das nove componentes dos deslocamentos, cinco são independentes, concretamente: os três deslocamentos, U, V e W e as rotações do eixo dos zz $\psi_{zx}$ e $\psi_{zy}$, respectivamente em torno do eixo dos xx e do eixo dos yy. As outras rotações são derivadas das três componentes dos deslocamentos lineares:

$$\psi_{yx} = \frac{\partial W}{\partial y}, \psi_{yz} = \frac{\partial U}{\partial y},$$

$$\psi_{xy} = \frac{\partial W}{\partial x}, \psi_{xz} = \frac{\partial V}{\partial x} \qquad (1)$$

As rotações do eixo dos zz $\psi_{zx}$ e $\psi_{zy}$ diferem de $\frac{\partial w}{\partial y}$ e $\frac{\partial W}{\partial y}$ por causa das distorções $\delta_x$ e $\delta_y$ devidas ao corte radial nas faces horizontais e verticais da aduela

$$\delta_y = \psi_{zx} - \frac{\partial W}{\partial y} \quad \text{e} \quad \delta_x = \psi_{zy} - \frac{\partial W}{\partial x} \qquad (2)$$

Se as distorções $\delta_x$ e $\delta_y$ fossem iguais a zero, as seis rotações dos eixos deveriam ser iguais duas a duas. Neste caso, seria suficiente tomar as três componentes dos deslocamentos U, V e W para descrever todas as deformações de casca, e corresponderia a aceitar a hipótese corrente na Teoria das Cascas de que os segmentos normais a superfície média permanecem normais a essa superfície depois da deformação. Neste caso, em que os arcos foram definidos como planos e horizontais, corresponderia a admitir que os ângulos entre os segmentos horizontais normais aos arcos a montante e a superfície média permanecem constantes. Ver-se-á, no cap. 11, que os erros que resultarão por vezes do facto de se desprezar as distorções $\delta_x$ e $\delta_y$ são pequenos na operação do ajustamento especialmente nas barragens finas. Deve acentuar-se que, quando se calculam os arcos e as consolas um a um, estas distorções são consideradas no cálculo dos respectivos deslocamentos, porque já não é desprezável esta contribuição, embora as extensões e as flexões permaneçam como principais contribuitnes dos deslocamentos.

Aceitam-se as duas hipóteses básicas da Resistência dos Materiais: (1) que as faces horizontais e verticais da aduela permanecem planas depois da deformação (hipótese de Navier), o que quer dizer que as tensões normais e as tensões tangenciais de montante a jusante, têm uma distribuição linear e (2) que são desprezáveis as deformações da espessura, correspondentes às tensões normais radiais (que são iguais à pressão hidrostática no paramento de montante), o que equivale a admitir que as cargas são concentradas na superfície média.

Deste modo, as deformações das aduelas que se tomam em consideração no Método, são as seguintes, ou as suas combinações, todas deriváveis das componentes dos deslocamentos atrás referidos:

1 — duas extensões ou encurtamentos da aduela, $\varepsilon$ — uma vertical, $\varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y}$, que

é a extensão, na vertical, da linha média das consolas, e outra horizontal, $\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x}$, que é a extensão na linha média dos arcos;

2 — duas flexões $\beta$ — que são as variações angulares entre as faces verticais dos arcos, $\beta_x = \frac{\partial \psi_{xy}}{\partial x}$ e as faces horizontais das consolas, $\beta_y = \frac{\partial \psi_{yx}}{\partial y}$;

3 — duas torções $\omega$ — uma de eixo vertical, $\omega_y$, das consolas, e a outra de eixo horizontal tangencial dos arcos, $\omega_x$;

4 — três escorregamentos, as distorções entre as faces verticais na direcção radial, $\delta_x$ (corte radial nos arcos), entre as faces horizontais na direcção radial $\delta_y$, (corte radial nas consolas); e distorção angular na superfície média $\gamma_t$ (distorção tangencial).

Assim a deformação da linha média dos arcos pode ser expressa por:

$$\beta_x + \frac{\partial \delta_x}{\partial x} = \frac{\partial \psi_{xy}}{\partial x} = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \qquad (3)$$

em que $\beta_x$ será a deformação atrás definida e $\delta_x$ introduzirá o efeito da distorção angular devida ao corte radial nas faces verticais.

Para as consolas, a deformação da linha média será expressa também por:

$$\beta_y + \frac{\partial \delta_y}{\partial y} = \frac{\partial \psi_{yx}}{\partial y} = \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \qquad (4)$$

sendo, anàlogamente, $\beta_y$ a deformação já atrás definida e $\delta_y$ o efeito da distorção angular devida ao corte radial nas faces horizontais.

Sendo W o deslocamento radial do centro de gravidade da aduela, a torção das faces horizontais $\omega_y$ (entre segmentos radiais das faces horizontais, secções das consolas) é dada por:

$$\omega_y = \frac{\partial \psi_{zy}}{\partial y} = \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \delta_x}{\partial y} \qquad (5)$$

e a torção $\omega_x$ das faces verticais (secções dos arcos) é dada por:

$$\omega_x = \frac{\partial \psi_{xz}}{\partial x} = \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial x} + \frac{\partial \delta_x}{\partial x} \qquad (6)$$

Se aqui forem desprezadas as derivadas das distorções angulares em relação às derivadas das rotações (Eq. 2), e se se tomar em conta que, por razões de continuidade de uma superfície deformada, as duas derivadas cruzadas dos deslocamentos radiais são iguais, então pode-se aceitar que:

$$\omega = \omega_x = \omega_y = \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial x} \qquad (7)$$

Isto significa que as torções $\omega_x$ e $\omega_y$ podem ser consideradas iguais tanto para arcos como para consolas, e que apenas é necessário considerar uma delas, preferìvelmente a que se refere às rotações em torno do eixo vertical, $\omega_y$, porque é mais fácil de determinar.

Finalmente, a distorção $\gamma_t$ na superfície média também se pode escrever em função das componentes dos deslocamentos:

$$\gamma_t = \psi_{xz} + \psi_{yz} = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \qquad (8)$$

## 4 — EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

No presente método considera-se que as forças actuando nas faces radiais de cada aduela representam os integrais das tensões instaladas naquelas faces e que estão relacionadas com deformações, que por sua vez integram-se, dando os deslocamentos, os quais devem ser os mesmos quando as deformações são integradas ao longo dos arcos ou ao longo das consolas. Deve ainda ter-se em atenção que cada um dos sistemas, de arcos ou consolas, suporta não só as suas forças internas mas também as forças actuando nas suas faces limites e que, consequentemente, arcos ou consolas representam completamente a estrutura, i.e. cada sistema resiste, por si só, totalmente, às forças externas. As forças internas dos arcos actuam nas faces limites das consolas e vice-versa.

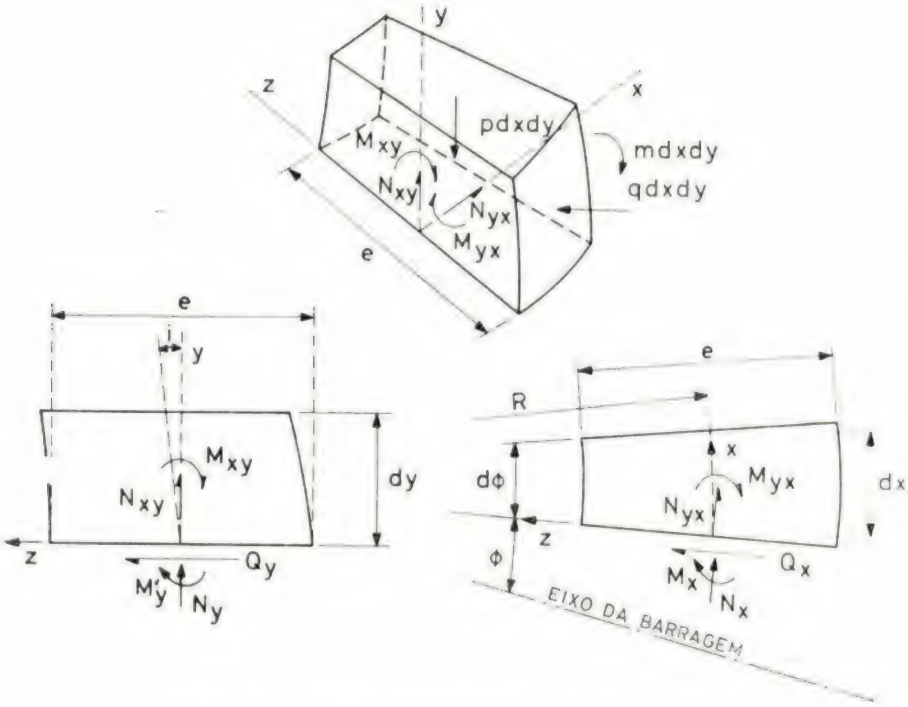



Fig. 3 — Forças internas e exteriores actuando numa aduela

Na Fig. 3 indicam-se as forças internas e as cargas exteriores actuando numa aduela comum a um arco e a uma consola. As forças externas são o peso mais a componente vertical da pressão hidrostática, representadas por p, o momento devido a estas cargas verticais, m, e a componente horizontal da pressão hidrostática, q.

Os métodos simplificados usados no passado desprezavam todos eles algumas das forças internas indicadas na Fig. 3. Quanto maior o número de forças internas considerado, tanto mais exacto o método poderia ser. Por exemplo, na «fórmula dos tubos» apenas se considerava a força interna $N_x$; no método de arcos independentes $N_x$, $M_x$ e $Q_x$, no método «trial load» de ajustamento radial, consideravam-se as forças internas anteriores e ainda $M_y$ e $Q_y$ ($N_y$ só se considerava no cálculo das consolas independentes) enquanto que no «trial load» completo tomam-se em consideração todas as forças atrás referidas mais as forças internas $M_{yx}$ e $N_{yx}$. No presente método não só se consideram todas as forças internas indicadas na Fig. 3, mas também se consideram todas as condições de equilíbrio das forças actuantes nas aduelas pertencentes simultâneamente a um arco e a uma consola.

As equações de equilíbrio são as seguintes:

*a*) radial

$$\frac{N_x}{R} + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - q = 0$$

*b*) vertical

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} - p = 0$$

*c*) tangencial

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} - \frac{Q_x}{R} = 0 \qquad (9)$$

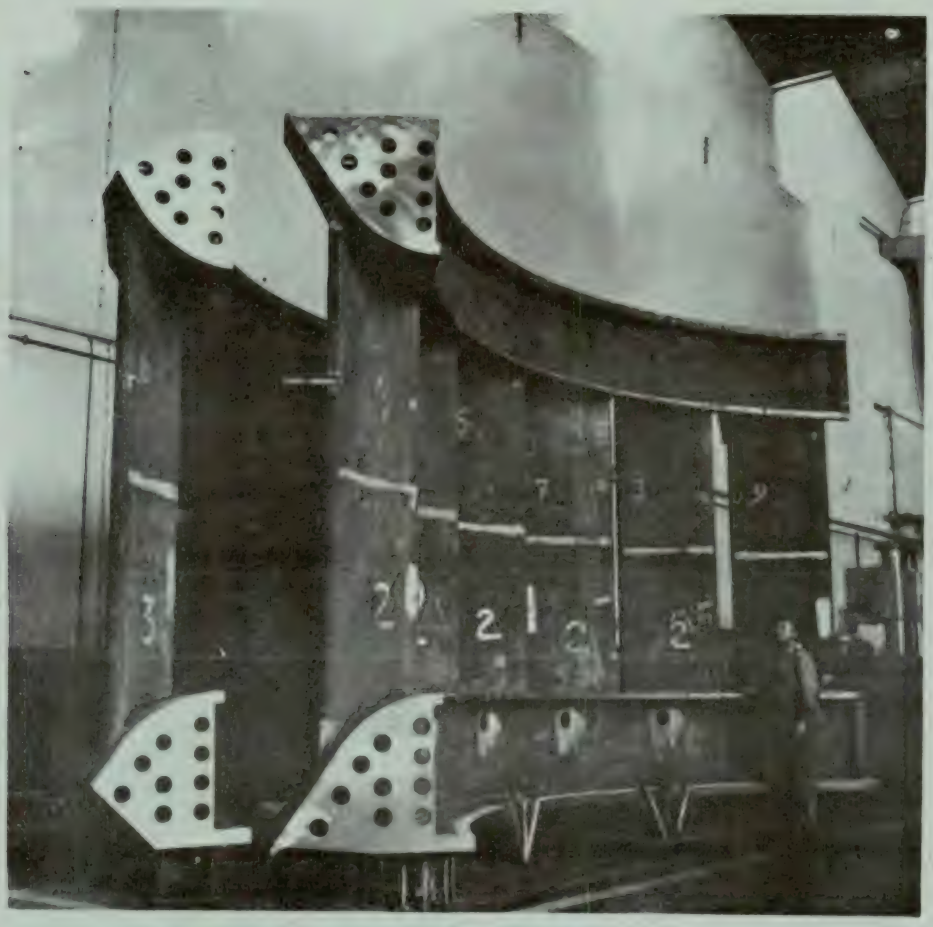
*d*) rotação de eixo horizontal tangencial

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y - N_y i - m = 0$$

*e*) rotação de eixo vertical

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - Q_x + N_{yx} i = 0$$

# MAGUE



Aspecto de 2 sectores de ante-distribuidor de uma das 3 Turbinas Kaplan de 100.000 CV destinadas à Central de Carrapatelo, da C.P.E., SARL. (Projecto KMW - NOHAB).

PONTES ROLANTES, GUINDASTES E APAR. DE ELEVAÇÃO ESPECIAIS — *Projecto e fabrico*

TURBINAS HIDRÁULICAS — *Fabrico segundo licença de A. C. M. de Vevey, S. A.*

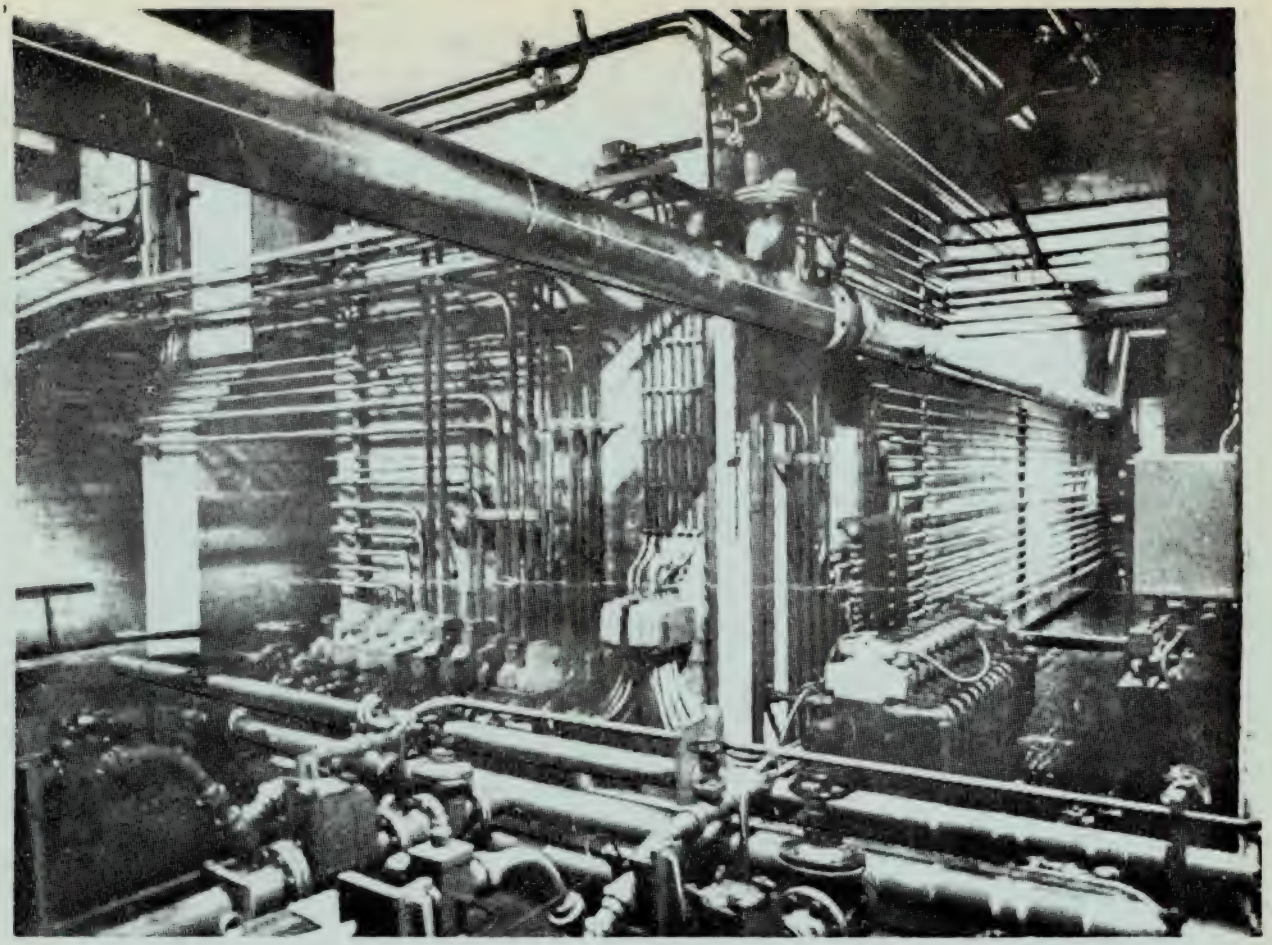
TURBINAS A VAPOR — *Fabrico segundo licença de Brown Boveri, Cie.*

CALDEIRAS A VAPOR — *Projecto e fabrico segundo licença de Foster Wheeler, Co.*

EQUIPAMENTOS E INSTALAÇÕES INDUSTRIAIS

CONSTRUÇÕES METALOMECANICAS **MAGUE** S.A.R.L

ALVERCA DO RIBATEJO — PORTUGAL



SIDERURGIA NACIONAL
Caves dos trens de laminagem T1 e T2
Tubagens

- ALTERNADORES (de potência superior a 2000 kVA), COMPENSADORES SÍNCRONOS, MOTORES DE GRANDE POTÊNCIA (fabricação parcial).
- EQUIPAMENTOS PARA INDÚSTRIAS QUÍMICAS E PETROQUÍMICAS
  Tubagens, tremonhas, reactores, permutadores, cisternas, etc.
- EQUIPAMENTOS PARA INDÚSTRIAS PETROLÍFERAS
  Torres, balões, permutadores, filtros, aerorefrigerantes, tubagens, etc.
- EQUIPAMENTOS PARA INDÚSTRIAS CIMENTEIRAS
  Fornos, moinhos, separadores, arrefecedores, etc.
- RESERVATÓRIOS
  De tecto fixo e tecto flutuante, de alta e baixa pressão. Para gases liquefeitos. Gasómetros
- EQUIPAMENTOS DE MANUTENÇÃO E TRANSPORTE
  Elevadores de alcatruzes, elevadores de palhetas, transportadores de tela metálica e de borracha, contentores, etc.
- ESTRUTURAS METÁLICAS
  Pontes, cimbres, coberturas, pisos, edifícios industriais, etc.
- MONTAGENS PESADAS

**SEPSA** SOCIEDADE DE CONSTRUÇÕES ELECTRO-MECÂNICAS, S.A.R.L.
APARTADO 8 • LEÇA do BAILIO • TELEX SEPSA P 2616

*f)* rotação radial

$$N_{xy} - N_{yx} - \frac{M_{xy}}{R} = 0$$

As equações 9 devem ser satisfeitas em toda a barragem. A primeira equação (*a*) toma em consideração as forças internas nos arcos e nas consolas e, portanto, deve ser verificada em ambos os sistemas de elementos. As equações 9 (*c*) e (*e*) serão satisfeitas no cálculo dos arcos e as equações 9 (*b*) e (*d*) apenas no das consolas. A eq. 9 (*f*) é idênticamente satisfeita por ser consequência da igualdade das tensões tangenciais $\tau_{xy}$ e $\tau_{yx}$, como se prova.

Nas equações relativas aos arcos, as forças internas nas faces superiores e inferiores podem ser substituídas por forças externas estàticamente equivalentes, definindo três grupos de forças fictícias variáveis $q_a$, $t_x$ e $m'_x$, ou seja

forças radiais

$$q - \frac{\partial Q_y}{\partial y} = q_a$$

forças tangenciais

$$\frac{\partial N_{yx}}{\partial y} = t_x \qquad (10)$$

forças de flexão de eixo vertical

$$\frac{\partial M_t}{\partial y} + N_{yx}\ i = m_x + N_{yx}\ i = m'_x$$

Com estas três variáveis, as três forças internas nos arcos $N_x$, $Q_x$ e $M_x$ podem ser determinadas, uma vez que as equações de equilíbrio relativas aos arcos são:

$$\frac{N_x}{R} + \frac{\partial Q_x}{\partial x} - q_a = 0$$

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} - \frac{Q_x}{R} + t_x = 0 \qquad (11)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x + m'_x = 0$$

Do que se acaba de dizer, torna-se então claro que, neste método, um arco deve suportar não só toda a carga exterior da porção de casca que ele representa, mas também forças interiores correspondentes às forças internas nas faces horizontais que o limitam.

Também, para as consolas, podem distinguir-se três forças fictícias variáveis:

forças radiais (as cargas exteriores menos as variações das forças internas no arco)

$$q - \frac{N_x}{R} - \frac{\partial Q_x}{\partial x} = q - q_a = q_c$$

forças verticais

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = t_y \qquad (12)$$

forças de flexão de eixo horizontal

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = m_y$$

Das variáveis $q_c$, $t_y$ e $m_y$ podem determinar-se as forças internas nas consolas, $N_y$, $Q_y$ e $M_y$, a partir das equações de equilíbrio correspondentes às consolas, as quais são;

$$\frac{\partial Q_y}{\partial y} - q_c = 0$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} - p + t_y = 0 \qquad (13)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y - N_y i - m + m_y = 0$$

Torna-se aqui claro, também, que uma consola deve suportar não só todas forças externas da porção de casca que representa, mas as forças internas actuando nas suas faces laterais. Pode então concluir-se que o sistema de arcos ou de consolas deve, cada um deles, satisfazer as equações de equilíbrio no espaço de toda a casca, sem desprezar nenhuma das forças internas.

Conclui-se também que, a partir do conhecimento das forças exteriores, reais e fictícias, é possível, analisando cada arco e cada consola isoladamente, determinar os esforços e os deslocamentos das secções.

## 5 — EFEITOS DOS MOMENTOS DE TORÇÃO E ESFORÇOS DE CORTE

Nos capítulos anteriores escreveram-se as equações de equilíbrio e as relações geométricas entre deformações e deslocamentos, no que respeita às cascas. Falta porém referir as relações entre os esforços (ou as tensões) e os deslocamentos (ou as deformações), isto é, as relações de elasticidade. As equações de equilíbrio agruparam-se em duas séries referidas respectivamente aos arcos e às consolas, com vista a permitir a análise separada desses elementos. A partir dos esforços agrupados naquelas séries é efectivamente possível determinar os deslocamentos dos arcos e das consolas por recorrência às fórmulas bem conhecidas da Resistência dos Materiais, relativas a estruturas bi-dimensionais. Há porém deformações da casca — a distorção tangencial $\gamma_t$ e as torções $\omega$ — que não se podem analisar senão visualizando a casca na sua dimensão tridimensional, deformações essas que têm com os esforços relações fundamentais a respeitar. Este capítulo dedica-se a estas deformações e às suas relações com os esforços.

As torções $\omega_x$ e $\omega_y$ são proporcionais aos momentos de torção $M_{xy}$ e $M_{yx}$ que actuam nas faces radiais da aduela (Fig. 3). Derivando estes momentos de torção obtêm-se forças de flexão de eixos horizontais e verticais com as seguintes expressões:

$$m_x = \frac{\partial M_t}{\partial y} \qquad m_y = \frac{\partial M_t}{\partial x} \tag{14}$$

As primeiras forças de flexão actuam nos arcos e as segundas nas consolas. Isto é, os momentos de torção originam torções nos seus próprios eixos e flexões nos elementos ortogonais a esses eixos. Estas flexões são consideradas na análise separada dos arcos e das consolas.

No que diz respeito aos deslocamentos tangenciais e verticais (U e V) da aduela, eles não podem ser considerados como independentes, como tem sido admitido noutros métodos[6]. De facto, ambos os movimentos estão relacionados com as tensões tangenciais médias nas faces horizontais e verticais das aduelas $\tau_{xy}$ e $\tau_{yx}$ e, portanto, devem ser considerados simultâneamente. A distorção por corte tangencial (deformação média por corte) da aduela é, de acordo com a análise geométrica das deformações atrás realizada,

$$\gamma_t = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} = \psi_{yz} + \psi_{xz} \tag{15}$$

Esta distorção está relacionada com forças de corte $N_{xy}$ e $N_{yx}$ (Fig. 3), porque, como se verá adiante, estas forças são, cada uma, integrais de tensões tangenciais proporcionais à distorção $\gamma_t$. Por sua vez o deslocamento U é igual ao deslocamento tangencial dos arcos devido às várias cargas actuando nelas mais a força tangencial horizontal

$$t_x = \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} \tag{16}$$

E o deslocamento V é igual ao deslocamento vertical da consola devido às várias cargas incluindo as forças verticais

$$t_y = \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \tag{17}$$

Poder-se-ia admitir, como foi feito noutros métodos[9], que $t_x$ e $t_y$ eram independentes e então tentar obtê-los como forças separadas internas iguais, mas opostas, nos arcos e nas consolas, por meio de ajustamentos diferentes dos movimentos verticais e tangenciais. Este

procedimento, todavia, não é correcto porque ele despreza as relações fundamentais entre as forças de corte, as distorções por corte e as derivadas dos deslocamentos U e V (Eq. 15).

Porém as duas forças de corte $N_{xy}$ e $N_{yx}$ e os dois momentos de torção $M_{xy}$ e $M_{yx}$ não são independentes. Como eles são os integrais das tensões tangenciais nas faces horizontais e verticais da aduela, basta apenas considerar uma das forças de corte e um dos momentos de torção para determinar os outros dois. Assim, admitindo que as tensões tangenciais seguem uma lei de distribuição linear, ao longo da espessura da barragem (Fig. 4), e isto sem perda de generalidade uma vez que se poderia escolher outra

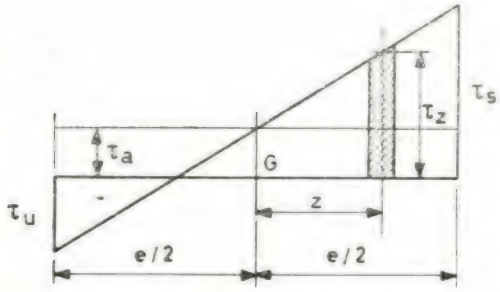



Fig. 4 — Equilíbrio das tensões tangenciais

distribuição qualquer, arbitrária, chamando $\tau_u$, $\tau_s$ e $\tau_a$ respectivamente aos valores da tensão tangencial a montante, a jusante e no centro da secção, resulta que a tensão tangencial $\tau_z$, no ponto à distância z deste centro, é:

$$\tau_z = \frac{\tau_s + \tau_u}{2} + \frac{\tau_s - \tau_u}{e} z \qquad (18)$$

Então nas faces verticais da aduela, resultará

$$N_{xy} = \int_{-\frac{e}{2}}^{+\frac{e}{2}} \tau_z \, dz = \frac{\tau_s + \tau_u}{2} e = \tau_a e \qquad (19)$$

$$M_{xy} = \int_{-\frac{e}{2}}^{+\frac{e}{2}} \tau_z \, z \, dz = (\tau_s - \tau_u) \frac{e^2}{12} \qquad (20)$$

e nas faces horizontais, sendo R o raio de curvatura horizontal da superfície média da casca, será:

$$N_{yz} = \int_{-\frac{e}{2}}^{+\frac{e}{2}} \tau_z \left(1 - \frac{z}{R}\right) dz = \qquad (21)$$

$$= \frac{\tau_s + \tau_u}{2} e - (\tau_s - \tau_u) \frac{e^2}{12R}$$

$$M_{yz} = \int_{-\frac{e}{2}}^{+\frac{e}{2}} \tau_z \left(1 - \frac{z}{R}\right) z \, dz = \qquad (22)$$

$$= (\tau_s - \tau_u) \frac{e_2}{12} - (\tau_s + \tau_u) \frac{e^3}{23 R}$$

A partir destas expressões, fazendo

$$T = N_{xy} \quad \text{e} \quad M_t = M_{yx} \qquad (23)$$

as outras forças $N_{yx}$ e $M_{xy}$ serão dadas por

$$M_{xy} = M_{yx} + N_{xy} \frac{e^2}{12R} = M_t + \frac{e^2 T}{12R} \qquad (24)$$

e

$$N_{yx} = N_{xy} - \frac{M_{xy}}{R} = T - \frac{e^2 T}{12 R^2} - \frac{M_t}{R} \qquad (25)$$

As eq. 14, 16 e 17 tomam então a seguinte forma:

forças tangenciais (nos arcos)

$$t_x = \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(T - \frac{e^2 T}{12 R^2} - \frac{M_t}{R}\right) \qquad (26)$$

forças de flexão (de eixo vertical)

$$m_x = \frac{\partial M_t}{\partial y} \qquad (27)$$

ou se se introduzir a parcela devida a excentricidade de $N_{yx}$ (Eq. 10)

$$m'_x = \frac{\partial M_t}{\partial y} + Ti \tag{28}$$

forças verticais (nas consolas)

$$t_y = \frac{\partial T}{\partial x} \tag{29}$$

forças de flexão (de eixo horizontal)

$$m_x = \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(M_t + \frac{e^2 T}{12 R}\right) \tag{30}$$

No caso da barragem apresentar espessuras muito pequenas em comparação com o raio dos arcos, os termos que contêm as relações $\frac{e}{R}$ e $\frac{1}{R}$ podem ser desprezados e então

$$\begin{aligned} M_{xy} &\simeq M_{yx} = M_t \\ N_{yx} &\simeq N_{xy} = T \end{aligned} \tag{31}$$

e as Eq. 26, 27, 29 e 30 tomam a seguinte forma mais simplificada

$$t_x = \frac{\partial T}{\partial y} \quad e \quad t_y = \frac{\partial T}{\partial x}, \tag{32}$$

$$m_x = \frac{\partial M_t}{\partial y} \quad e \quad m_y = \frac{\partial M_t}{\partial x} \tag{33}$$

Note-se que esta simplificação não é indispensável para aplicação deste método e só tem sido usada naqueles casos em que a ordem de grandeza da relação $\frac{e}{R}$ a torna legítima. Adiante serão apresentados os erros cometidos quando se pratica esta aproximação.

## 6 — CONDIÇÕES DE COMPATIBILIDADE

O problema do cálculo das cascas, como se sabe[10, 11, 12], não se resolve apenas com a satisfação das equações de equilíbrio e das condições limites ou de contorno, a menos que a casca seja encarada como membrana, desprezando-se os esforços transversos radiais e os momentos de flexão e torção, simplificação que já não é legítima nas barragens, por mais delgadadas que sejam. Torna-se por isso necessário juntar às equações de equilíbrio outras equações de compatibilidade recorrendo à análise do comportamento elástico da estrutura. Se nas cinco primeiras equações de equilíbrio atrás apresentadas (Eq. 9) se substituir $N_{xy}$ e $M_{yx}$ respectivamente por T e $M_t$ e $N_{yx}$ e $M_{xy}$ pelos segundos membros das Eq. 24 e 25 passamos a dispor de cinco equações de equilíbrio envolvendo as oito incógnitas seguintes: $N_x$, $Q_x$, $N_y$, $Q_y$, $M_x$, $M_y$, T e $M_t$. Para a resolução do problema é necessário, portanto, introduzir mais três equações que relacionem deformações e tensões ou deslocamentos e forças. Essas três equações deverão impor a igualdade de todos os deslocamentos lineares e rotações sofridas pelas aduelas quer quando encaradas como pertencendo a arcos quer a consolas. As três novas equações de compatibilidade a introduzir para levantar a indeterminação hiperestática exprimem: (I) a igualdade dos deslocamentos radiais; (II) a igualdade das rotações de eixo vertical; (III) a igualdade expressa pela Eq. 15. Recordando a análise feita no cap. 3 e admitindo como válida a aproximação resultante do facto de se desprezar as derivadas das distorções angulares $\delta_x$ e $\delta_y$, devidas aos cortes transversos radiais $Q_y$ e $Q_x$ concui-se que as igualdades (I) e (II) garantem a compatibilidade dos deslocamentos radiais W e das rotações $\psi_{zx}$, $\psi_{zy}$, $\psi_{yx}$ e $\psi_{xy}$. A igualdade (III) garante a compatibilidade dos deslocamentos U e V e das rotações $\psi_{xz}$ e $\psi_{yz}$. Este conjunto de oito equações satisfaz, portanto, integralmente, as condições de equilíbrio das forças e de compatibilidade dos deslocamentos. Note-se que a consideração das derivadas das distorções angulares $\delta_x$ e $\delta_y$ (Eq.7) não introduziria nenhuma nova incógnita por

## Dimensionamento de Secções de Betão Armado em Relação à Rotura

**Matérias**

- Flexão simples de secções rectangulares simplesmente armadas
- Flexão simples de secções rectangulares duplamente armadas
  a) com armadura de compressão reduzida
  b) com armadura de tracção reduzida
- Flexão simples de secções T duplamente armadas
- Flexão simples de secções T duplamente armadas
- Compressão simples
- Flexão composta de secções rectangulares
  a) com armadura simétrica
  b) com armadura de tracção reduzida
  c) com armadura de compressão reduzida
- Flexão composta desviada de secções rectangulares
- Flexão composta de secções em T
  a) com armadura de tracção reduzida
  b) comarmadura de compressão reduzida
- Flexão simples e flexão composta de secções circulares cheias
- Flexão simples e flexão composta de secções circulares ocas
- Esforço transverso

**Preço 150$00**

---

## Dimensionamento de Secções Circulares de Betão Armado em Relação à Rotura

**Matérias**

- Flexão simples e flexão composta de secções circulares cheias
- Flexão simples e flexão composta de secções circulares ocas

**Preço 60$00**

Por J. M. MADEIRA COSTA

ENG.º CIVIL

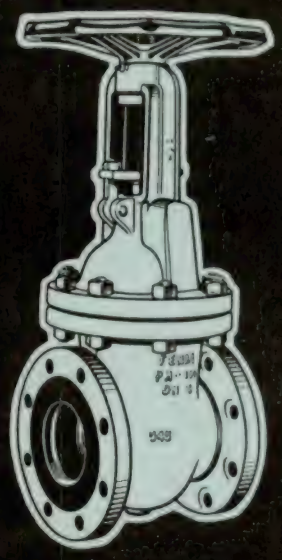
À venda na TÉCNICA e nas LIVRARIAS



SP SUIÇO-PORTUGUÊS 1 286/439/A2

# VÁLVULAS

de cunha,
retenção, regulação
e passagem



Segundo normas DIN e ASA,
para líquidos, vapores e gases
(incluindo Cl, $NH_3$ e $SO_2$ ).
Execução em ferro fundido, aço
vazado, aço inoxidável
e ligas especiais.
Diâmetros nominais de 10 a 600mm.
Pressões nominais de 4 a 40 kg./cm².

ESTUDOS • PROJECTOS
ORÇAMENTOS
ASSISTÊNCIA TÉCNICA

**SOCIEDADE PORTUGUESA DE VÁLVULAS, L.DA**

Rua da Academia das Ciências, n.º 5,
Lisboa-2 - Telefone P.P.C.A. 320011.

# ESTAMPARIAS TINTURARIAS LAVANDARIAS

PARA OS VOSSOS TECIDOS TÉCNICOS:
TRANSPORTADORES, MANCHONS, LAPPING, WOLFRIES,
FLANELAS, CANEVAS, ETC.,

EM FIBRAS NATURAIS OU SINTÉTICAS

CONSULTEM:

FANAFEL

FÁBRICA NACIONAL DE FELTROS INDUSTRIAIS
SOCIEDADE LIMITADA

APART.: 9
TELEFS : 52091 PBX
TELEG.: FELTROS

OVAR
PORTUGAL

ESCRITÓRIO E FÁBRICA
ESTRADA DE S. JOÃO

# Empresa Ultramarina de Sondagens e Fundações, L.da

(SONDADORA)

SONDAGENS geológicas e geotécnicas — CAPTAÇÕES de águas subterrâneas — REBAIXAMENTOS do nível freático — CONSOLIDAÇÕES E ESTABILIZAÇÃO do solo — INJECÇÕES DE CIMENTO e outros produtos — INFRAESTRUTURAS de barragens, túneis e pontes — FUNDAÇÕES de todos os tipos

**Única Empresa da especialidade com sede no Ultramar Português**

DELEGAÇÃO - LISBOA
R.S.Pedro de Alcântara, 1
Tel. 32 46 93 e 21 32 56

SEDE - LUANDA
Rua Serpa Pinto, 60
C.P.2178 - Tel.4226

MOÇAMBIQUE
L.Marques - C.P.982 - Tel.74 11 21
Beira - C.P. 1002 - Tel. 7 14 97

que são exclusiva consequência dos esforços $Q_x$ e $Q_y$.

Retomando agora as seis forças fictícias $q_a$, $q_c$, $t_x$, $t_y$, $m'_x$ e $m_y$ (Eq. 10 e 12) observa-se que elas, em conjunto com T e $M_t$ são suficientes para a determinação dos esforços $N_x$, $N_y$, $Q_x$, $Q_y$, $M_x$ e $M_y$. Por outro lado as forças T e $M_t$ dão a conhecer $t_x$, $t_y$, $m_x$ e $m_y$ por intermédio das Eq. 26, 28, 29 e 30 e $q_c$ é conhecido a partir de $q_a$ (Eq. 12). Então o problema reduz-se à determinação de $q_a$, T e $M_t$.

Estas seis forças fictícias permitem a determinação de deslocamentos da barragem. As três das Eq. 10, nos arcos, produzem deslocamentos radiais $W_a$, deslocamentos tangenciais $U_a$ e rotações $\theta_a$ de eixo vertical, de acordo com as fórmulas bem conhecidas da teoria dos arcos. Não é necessário calcular os deslocamentos verticais e as rotações de eixo horizontal dos arcos. Os deslocamentos verticais dos arcos são tomados em consideração no cálculo através de $\frac{\partial V}{\partial x} = \psi_{xy}$, que é considerado como uma variável independente, e uma vez que se imponha que as rotações de eixo vertical dos arcos sejam iguais às rotações de eixo vertical das consolas, a compatibilidade das rotações de eixo horizontal torna-se redundante.

As outras três forças fictícias correspondentes às consolas permitem a determinação dos deslocamentos radiais $W_c$, dos deslocamentos verticais $V_c$ todos funções de $q_c$, $t_y$ e $m_y$ e as rotações de eixo vertical $\theta_c$ (devidas apenas ao $M_t$). Os deslocamentos tangenciais horizontais das consolas não são calculados mas não tomados em consideração através da derivada $\psi_{yz} = \frac{\partial U}{\partial y}$, considerada como uma variável independente. Como já se referiu, as as forças fictícias $m'_x$, $m_y$, $t_x$ e $t_y$ são derivadas de funções em que intervêm as incógnitas $M_t$ e T e a soma de $\psi_{xz}$ e $\psi_{yz}$ é proporcional a T, pelo que há apenas três variáveis a determinar que são $q_a$, $M_t$ e T. Todavia, por razões de simplicidade e rigor, tomam-se, normalmente, as seguintes quatro variáveis: $q_a$, $M_t$, T e $\psi_{yz}$.

Também por razões de simplicidade e rigor a condição de compatibilidade (111), $\gamma_t = \frac{T}{Ge} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}$ exprime-se pelas Eq. 34 e 35 que se discutirão a seguir.

A compatibilidade dos deslocamentos verticais é satisfeita pela expressão:

$$\psi_{xz} = \frac{\partial V}{\partial x} \quad \text{ou} \quad \frac{T}{Ge} = \psi_{yz} = \frac{\partial V}{\partial x} \qquad (34)$$

sendo V o deslocamento vertical das consolas.

Quando se analisam os deslocamentos tangenciais horizontais, pode-se notar que os centros de gravidade das aduelas, que constituem uma consola, formam uma curva torsa no espaço. A direcção do eixo tangencial x varia, por consequência, ao longo da linha de centros e a expressão $\psi_{yz} = \frac{\partial U}{\partial y}$ é apenas válida na vizinhança do centro da aduela. Se a curvatura vertical e as variações de direcção do eixo xx são consideradas, a equação de compatibilidade dos deslocamentos tangenciais, será expressa pela equação:

$$\psi_{yz} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{U i}{R} - W \frac{\partial \phi}{\partial y} \qquad (35)$$

sendo R o raio da superfície média e $\phi$ o ângulo horizontal entre o eixo da aduela e o eixo da barragem.

Deste modo, podem escrever-se as seguintes equações de compatibilidade:

$$W_a\,(q_a, t_x, m'_x) = W_c\,(q\text{-}q_a, p, t_y, m_y, m)$$

$$\theta_a\,(q_a, t_x, m'_x) = \theta_c\,(M_t)$$

$$U_a\,(q_a, t_x, m'_x) + \int \left\{ U_a\,(q_a, t_x, m'_x)\,\frac{i}{R} - \frac{\partial \phi}{\partial y}\,W_a\,(q_a, t_x, m'_x) - \psi_{yz} \right\} dy = 0$$

$$V_c\,(q - q_a, p, t_y, m, m_y) - \int \left(\frac{T}{Ge} - \psi_{yz}\right) dx = 0$$

$$m'_x - \frac{\partial M_t}{\partial y} + Ti = 0 \qquad (36)$$

$$m_y - \frac{\partial}{\partial x}\left(M_t + \frac{e^2 T}{12R}\right) = 0$$

$$t_x - \frac{\partial}{dy}\left(T - \frac{e^2 T}{12R^2} - \frac{M_t}{R}\right) = 0$$

$$t_y - \frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

A solução deste sistema permite a determinação de oito incógnitas em cada aduela $q_a$, $M_t$, $T$, $\psi_{yz}$, $m'_x$, $m_y$, $t_x$ e $t_y$. É este sistema de equações que resolve o problema da determinação das forças internas das aduelas. Normalmente, para o cálculo de uma barragem simétrica, usando uma malha de seis arcos e seis consolas, o número de equações é de 189.

Calcula-se em primeiro lugar o efeito das forças $q_a$, $q_c$ $(= q - q_a)$, $M_t$, $t_x$, $t_y$, $m'_x$, $m_y$ nos arcos ou nas consolas para cargas unitárias, e depois introduzem-se esses efeitos em termos de coeficientes de influência k nas aduelas de cruzamento de arcos e de consolas, como se indica em seguida. Nas expressões que relacionam $t_x$, $t_y$, $m'_x$ e $m_y$ com $M_t$ e $T$, substituem-se as derivadas por diferenças finitas.

$$(W_a)_j = \sum_i (k)_{ji} (q_a)_i + \sum_i (k)_{ji} (m'_x) + \sum_i (k)_{ji} (t_x)_i$$

$$(U_a)_j = \text{idêntica}$$

$$(\theta_a)_j = \text{idêntica} \qquad (37)$$

$$(W_c)_j = \sum_i (k)_{ji} (q - q_a)_i + \sum_i (k)_{ji} (m_y)_i + \sum (k)_{ji} (t_y)_i$$

$$(V_c)_j = \text{idêntica}$$

$$(\theta_c)_j = \sum_i (k)_{ji} (M_t)_i$$

Deste modo, as consolas necessitam de ser analisadas para séries de forças triangulares unitárias: radiais, $q_{cj}$, verticais $t_{yj}$, flexões de eixo horizontal, $m_{yj}$, e torções verticais $M_{tj}$. Não é necessário considerar forças tangenciais. Semelhantemente, os arcos devem ser analisados para cargas radiais $q_{aj}$, tangenciais $t_{xj}$ e flexões de eixo vertical $m'_{xj}$, e as cargas de torção de eixo horizontal não necessitam ser consideradas nos arcos.

A partir da solução do sistema de Eq. 36 determinam-se os valores de cada uma das cargas $q_a$, $t_x$, $t_y$, $m'_x$, $m_y$, $M_t$ e $T$ em cada aduela de cruzamento. A partir destas cargas, determinam-se as forças internas que entram nas Eq. 11 e 13. Pode então fazer-se a determinação completa das tensões nas faces e no interior da barragem e também das reacções da barragem contra a fundação. As fórmulas usadas para a determinação das tensões principais são as que se deduzem fàcilmente das condições de equilíbrio de tetraedros junto aos paramentos.

*(Continua)*

C. D. U. 621.315.09

# LINHAS POLIFÁSICAS UNIFORMES E LINEARES EM FUNCIONAMENTO SINUSOIDAL PERMANENTE EQUILIBRADO

## II — SIMETRIA, PASSIVIDADE E RECIPROCIDADE

Por HERMÍNIO DUARTE-RAMOS
Engenheiro Electrotécnico (I.S.T.)
Assistente da U.L. (Angola)

RESUMO

*Apresentam-se as expressões gerais de uma linha polifásica uniforme finita e definem-se as condições de simetria, passividade e reciprocidade, discutindo-se as respectivas consequências nas grandezas fundamentais da linha.*

SINOPSYS

*The essential expressions of a finite homogeneous polyphase electrical line are presented. The phisical and mathematical conditions of symmetrical, passive and reciprocal lines are defined and the main caracteristics are discussed.*

## 1 — INTRODUÇÃO

O estudo geral das linhas uniformes de transmissão por meio do cálculo matricial conduz a expressões que convém analisar no caso prático das linhas finitas e quando se verificam condições especiais de passividade e reciprocidade, pois nestas circunstâncias as propriedades gerais assumem aspectos simplificados.

Na presente análise considera-se fundamental o conhecimento das leis gerais aplicáveis às linhas polifásicas uniformes e lineares [1].

## 2 — LINHA UNIFORME FINITA

### 2.1 — Equações da linha finita

Seja l o comprimento de um troço de linha em que os valores das tensões e das correntes no terminal de entrada (extremo ligado ao gerador polifásico que a alimenta), isto é para $x = o$, são $\mathbf{V}_0 = \mathbf{V}_1$ e $\mathbf{I}_0 = \mathbf{I}_1$ e os valores correspondentes no terminal de saída (extremo ligado à carga ou receptor), quer dizer, para $x = l$, são $\mathbf{V} = \mathbf{V}_2$ e $\mathbf{I} = \mathbf{I}_2$.

Pelas *equações hiperbólicas matriciais* da linha podem exprimir-se as grandezas à entrada da linha em função das homólogas à saída (sistema (43) em [1])

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{ch}\,\mathbf{G} & (\mathrm{sh}\,\mathbf{G})\,\mathbf{Z}_0 \\ \mathbf{Z}_0^{-1}\,\mathrm{sh}\,\mathbf{G} & \mathbf{Z}^{-1}(\mathrm{ch}\,\mathbf{G})\,\mathbf{Z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Define-se então a *matriz de transferência* da linha finita

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathrm{ch}\,(\Gamma l) & \mathrm{sh}\,(\Gamma l)\,\mathbf{Z}_0 \\ \mathbf{Z}_0^{-1}\,\mathrm{sh}\,(\Gamma l) & \mathbf{Z}^{-1}\,\mathrm{ch}\,(\Gamma l)\,\mathbf{Z} \end{bmatrix} \quad (2)$$

visto que a *matriz de propagação das tensões* tem o valor

$$\mathbf{G} = \Gamma l. \quad (3)$$

A *equação geral* da linha finita será

$$\mathbf{N}_1 = \mathbf{T}\,\mathbf{N}_2 \quad (4)$$

onde $\mathbf{N}_1$ representa o vector tensões-correntes à entrada da linha, $\mathbf{N}_2$ é o vector tensões-correntes à saída da linha e $\mathbf{T}$ traduz a matriz de transferência do troço de linha de comprimento l, ao qual correspondem as condições de saída $\mathbf{N}_2$ quando na entrada as condições são $\mathbf{N}_1$.

Vê-se assim o *significado da matriz de transferência* da linha finita: matriz que relaciona as grandezas de entrada com as grandezas de saída de um troço de linha uniforme, por intermédio das matrizes das impedâncias de onda das tensões e das constantes de transmissão das tensões.

## 2.2 — Quadri-multipolo equivalente da linha finita

Considerando a linha finita como um quadri-multipolo, constituído por 4 m terminais, sendo 2 m de entrada e 2 m de saída, equivalente à linha polifásica, a equação da linha pode tomar o aspecto híbrido

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \tag{5}$$

relativo às equações

$$V_1 = A V_2 + B I_2 \tag{6}$$

$$I_1 = C V_2 + D I_2 \tag{7}$$

que definem a matriz de transferência

$$T = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \tag{8}$$

com os valores determinados por

$$A = \text{ch } G \tag{9}$$

$$B = (\text{sh } G) Z_0 \tag{10}$$

$$C = Z_0^{-1} (\text{sh } G) \tag{11}$$

$$D = Z^{-1} (\text{ch } G) Z \tag{12}$$

ou

$$A = 1 + \frac{1}{2!} l^2 Z Y + \frac{1}{4!} l^4 (Z Y)^2 + \dots \tag{13}$$

$$B = \left[ 1 + \frac{1}{3!} l^2 Z Y + \frac{1}{5!} l^4 (Z Y)^2 + \dots \right] l Z \tag{14}$$

$$C = \left[ 1 + \frac{1}{3!} l^2 Y Z + \frac{1}{5!} l^4 (Y Z)^2 + \dots \right] l Y \tag{15}$$

$$D = 1 + \frac{1}{2!} l^2 Y Z + \frac{1}{4!} l^4 (Y Z)^2 + \dots \tag{16}$$

Por razões equivalentes a matriz de transferência inversa será

$$T_1 = \begin{bmatrix} A & -B \\ -C & D \end{bmatrix}. \tag{17}$$

Anàlogamente se pode raciocinar com a matriz de transferência $T'$ referida às grandezas das correntes definindo-se então as constantes generalizadas referidas às correntes $A'$, $B'$, $C'$ e $D'$.

## 2.3 — Impedâncias de onda

De um modo geral, para se *determinar a impedância de onda* de uma linha finita não longitudinalmente simétrica, fecha-se a linha por uma rede de cargas com 2 m terminais de matriz de impedâncias $Z_2$ e mede-se à entrada a matriz de impedâncias $Z_1$; depois fecha-se a linha à entrada por uma rede de cargas de matriz de impedâncias $Z_1$ e mede-se na extremidade de saída uma matriz de impedâncias $Z_2$. Estas duas matrizes de impedâncias, que satisfazem a estas propriedades, são as matrizes de impedâncias de onda respectivamente à entrada e à saída da linha finita.

Num sistema físico com simetria longitudinal (como é o caso da linha uniforme, como se verá) pode simplificar-se a determinação da impedância de onda: supondo a linha finita fechada por uma carga de 2 m terminais, ligados cada um a um terminal de saída da linha, a matriz das impedâncias de onda é caracterizada pelas impedâncias de carga tais que a matriz das impedâncias da linha e da carga aos seus terminais é igual à matriz das impedâncias de carga.

Deste modo conclui-se que $V_2 = Z_0 I_2$ e $V_1 = Z_0 I_1$. Nestas condições quando a linha finita está fechada pela sua impedância de onda anulam-se as parcelas relativas às ondas de reflexão e portanto

$$V_1 = e^G V_2 \tag{18}$$

e

$$I_1 = Z_0^{-1} e^G Z_0 I_2. \tag{19}$$

Outro modo de definir as impedâncias de onda consiste em calcular a matriz das impedâncias à entrada da linha infinita, como se verá.

No funcionamento da *linha finita em vazio*, caracterizado pela condição $I_2 = 0$, as equações contidas em (1) reduzem-se a

$$V_1 = \text{ch } G \,.\, V_2 \tag{20}$$

e

$$I_1 = Z_0^{-1} \text{sh } G \,.\, V_2 \tag{21}$$

# CONSTRUÇÕES TÉCNICAS, LDA.

PRAÇA DO MUNICÍPIO, 13-3º TELEF. 366506 LISBOA 2 • DELEGAÇÕES: CABO VERDE · ANGOLA · MOÇAMBIQUE

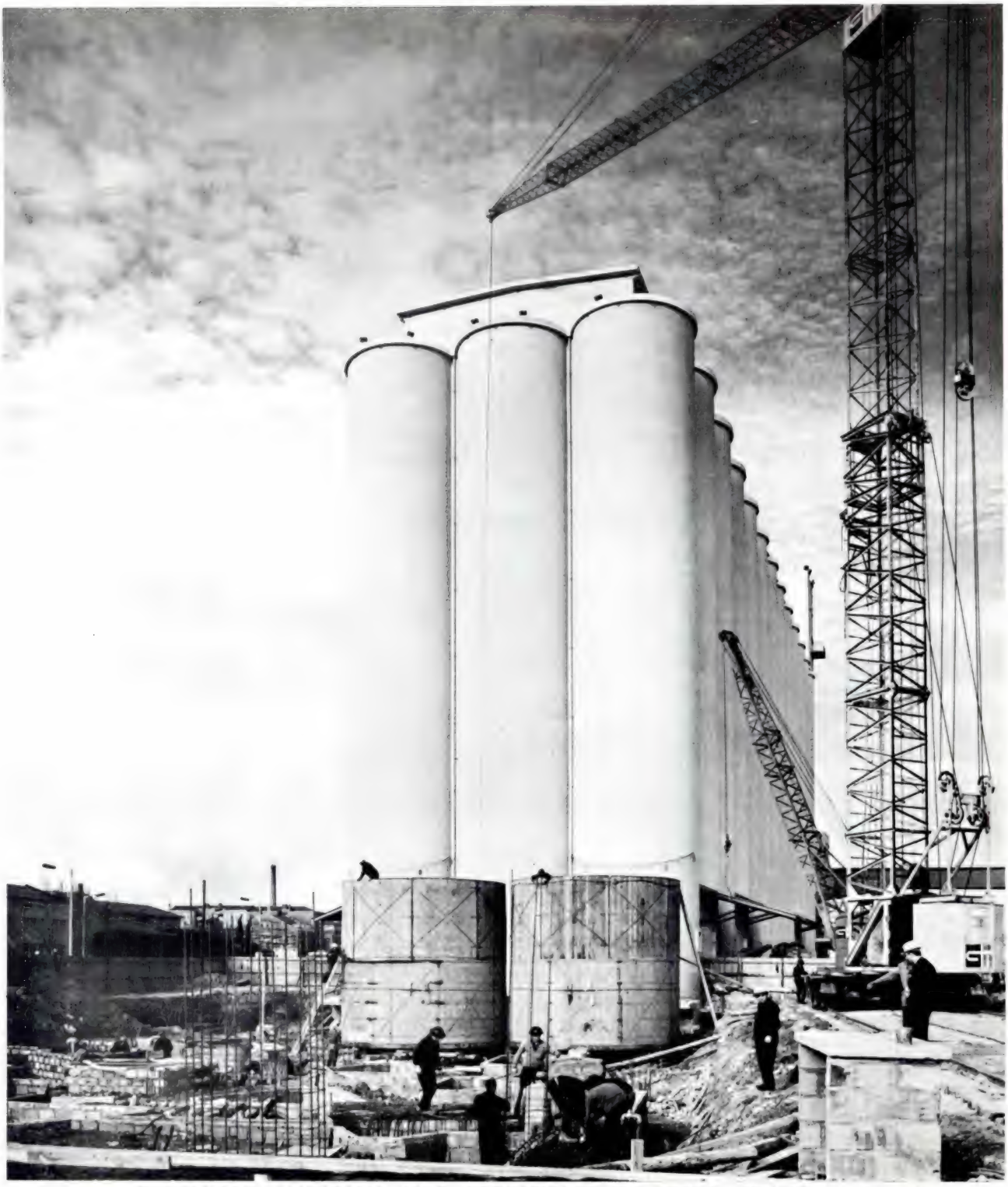
**DIRECÇÃO DE SERVIÇOS DE CAMINHOS DE FERRO, PORTOS E TRANSPORTES (DSCFPT)** — Moçambique — Porto de Lourenço Marques — Consolidação, Reforço e Aprofundamento do Cais Gorjão entre as Carvoeiras.

PROSPECÇÃO GEOTÉCNICA • FUNDAÇÕES ESPECIAIS

OBRAS MARÍTIMAS E PORTUÁRIAS • PONTES E VIADUTOS

CONSTRUÇÕES CIVIS • CONSTRUÇÕES INDUSTRIAIS

MIRA - 35000



**FEDERAÇÃO NACIONAL DOS PRODUTORES DE TRIGO (FNPT)** — Silo de Concentração de Lisboa (Beato) — Empreitada global de construção: 3.ª fase em curso para ampliação da capacidade, de 42 000 t para 60 000 t. Fundação com estacas Ø 1,00 metro.

**CONSTRUÇÕES TÉCNICAS, LDA.**

PROSPECÇÃO GEOTÉCNICA
OBRAS MARÍTIMAS E PORTUÁRIAS
SILOS E CHAMINÉS

FUNDAÇÕES ESPECIAIS
PONTES E VIADUTOS
CONSTRUÇÕES INDUSTRIAIS

que condensam, respectivamente, as interpretações físicas das constantes generalizadas $\mathbf{A}$ e $\mathbf{C}$.

De (20) e (21)

$$\mathbf{V}_1 = (\text{cth } \mathbf{G})\, \mathbf{Z}_0 \,.\, \mathbf{I}_1 \tag{22}$$

donde a matriz das impedâncias à entrada da linha em vazio

$$\mathbf{Z}_{1v} = (\text{cth } \mathbf{G})\, \mathbf{Z}_0 . \tag{23}$$

No funcionamento da *linha finita em curto-circuito*, condicionado por $\mathbf{V}_2 = \mathbf{0}$, anàlogamente se pode verificar

$$\mathbf{Z}_{1k} = (\text{th } \mathbf{G})\, \mathbf{Z}_0 . \tag{24}$$

Utilizando as equações referidas às intensidades obtém-se similarmente

$$\mathbf{Z}_{1v} = \mathbf{Z}_0' \,(\text{cth } \mathbf{G}') \tag{25}$$

e

$$\mathbf{Z}_{1k} = \mathbf{Z}_0' \,(\text{th } \mathbf{G}') . \tag{26}$$

A analogia destas expressões sugere que haja uma relação entre $\mathbf{Z}_0$ e $\mathbf{Z}_0'$. De facto de (23) e (25)

$$(\text{cth } \mathbf{G})\, \mathbf{Z}_0 = \mathbf{Z}_0' \,(\text{cth } \mathbf{G}') \tag{27}$$

e de (24) e (26)

$$(\text{th } \mathbf{G})\, \mathbf{Z}_0 = \mathbf{Z}_0' \,(\text{th } \mathbf{G}') \tag{28}$$

pelo que

$$\mathbf{Z}_0 = \mathbf{Z}_0' \tag{29}$$

e, substituindo em qualquer das expressões (27) ou (28),

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_0' \tag{30}$$

que, pelas respectivas definições, conduz a

$$\Gamma = \Gamma' . \tag{31}$$

Deste modo a matriz das impedâncias de onda pode-se representar por qualquer das expressões

$$\mathbf{Z}_0 = (\mathbf{Z}\,\mathbf{Y})^{-\frac{1}{2}}\, \mathbf{Z} \tag{32}$$

$$\mathbf{Z}_0 = (\mathbf{Z}\,\mathbf{Y})^{\frac{1}{2}}\, \mathbf{Y}^{-1} \tag{33}$$

$$\mathbf{Z}_0 = \mathbf{Y}^{-1} (\mathbf{Y}\,\mathbf{Z})^{\frac{1}{2}} \tag{34}$$

$$\mathbf{Z}_0 = \mathbf{Z}\,(\mathbf{Y}\,\mathbf{Z})^{-\frac{1}{2}} \tag{35}$$

ou, sucintamente,

$$\mathbf{Z}_0 = \mathbf{Z}^{\frac{1}{2}}\, \mathbf{Y}^{-\frac{1}{2}} . \tag{36}$$

### 2.4 — Simetria longitudinal

A condição de simetria longitudinal da linha caracteriza-se pelo facto da permutação dos índices da equação geral da linha exigir ùnicamente a inversão da matriz de transferência, isto é, $\mathbf{N}_1 = \mathbf{N}_2$ e $\mathbf{N}_2 = \mathbf{T}_i\, \mathbf{N}_1$ com $\mathbf{T}_i\, \mathbf{T}^{-1}$ pelo que $\mathbf{T}\, \mathbf{T}_i = \mathbf{1}$, donde, substituindo pelas expressões (8) e (17), se obtém as condições

$$\mathbf{A}^2 - \mathbf{B}\,\mathbf{C} = \mathbf{1} \tag{37}$$

$$\mathbf{D} - \mathbf{C}\,\mathbf{B} = \mathbf{1} \tag{38}$$

$$\mathbf{A}\,\mathbf{B} = \mathbf{B}\,\mathbf{D} \text{ e, se det } \mathbf{B} \neq 0,\ \mathbf{D} = \mathbf{B}^{-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{B} \tag{39}$$

$$\mathbf{C}\,\mathbf{A} = \mathbf{D}\,\mathbf{B} \text{ e, se det } \mathbf{C} \neq 0,\ \mathbf{D} = \mathbf{C}\,\mathbf{A}\,\mathbf{C}^{-1} \tag{40}$$

As duas últimas condições mostram que as matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{D}$ são semelhantes, visto que se pode obter uma da outra por uma transformação de semelhança.

É fácil mostrar que, dada a existência de simetria longitudinal, o determinante da matriz de transferência tem o valor $+1$. De facto

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & (\mathbf{A}-\mathbf{1})\,\mathbf{C}^{-1} \\ \mathbf{C} & \mathbf{C}\,\mathbf{A}\,\mathbf{C}^{-1} \end{bmatrix} \tag{41}$$

pode decompor-se em

$$\begin{bmatrix} 1 & (A-1)\,C^{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ C & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & (A-1)\,C^{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{42}$$

em que cada matriz tem o determinante igual a $+1$, sendo portanto

$$\det \mathbf{T} = +1 . \tag{43}$$

### 2.5 — Linha com simetria transversal

A condição matemática de simetria circular exprime que as matrizes $\mathbf{Z}$ e $\mathbf{Y}$ são transformadas em matrizes diagonais pela mesma transformação diagonal.

Como consequência fàcilmente se deduz que

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}\mathbf{Y} &= \mathbf{Y}\mathbf{Z} \\ \Gamma &= \Gamma' \\ \mathbf{G} &= \mathbf{G}' \\ \mathbf{Z}_o &= \mathbf{Z}_o' \\ \mathbf{A} &= \mathbf{D}. \end{aligned}$$

## 3 — LINHA PASSIVA

### 3.1 — Condições de passividade

A *condição física de passividade* de uma linha pode enunciar-se dizendo que a potência activa à entrada de uma linha passiva não pode ser negativa; pode ser nula se, estando a linha ligada às fontes, não houver dissipação de energia, isto é, se com $\mathbf{I} \neq \mathbf{0}$ for $P = 0$.

Ora a potência activa é a parte real da potência aparente complexa, $P = \mathrm{Re}\ \dot{S}$, isto é,

$$P = \mathrm{Re} \sum_{j=1}^{m} \dot{V}_{1j} \dot{I}_{1j}$$

onde $\dot{V}_{1j}$ e $\dot{I}_{1j}$ são os valores da tensão e da corrente complexas à entrada da fase j, ou, em notação matricial,

$$P = \mathrm{Re}\ \mathbf{V}_{1t}\ \mathbf{I}_1^* \tag{44}$$

ou seja

$$P = \mathrm{Re}\ \mathbf{I}_{1t}^*\ \mathbf{V}_1 \tag{45}$$

e, sendo $\mathbf{Z}_1$ a matriz das impedâncias à entrada da linha,

$$P = \mathrm{Re}\ \mathbf{I}_{1t}^*\ \mathbf{Z}_1\ \mathbf{I}_1 \tag{46}$$

quer dizer, P é a forma hermítica de $S = \mathbf{I}_{1t}^*\ \mathbf{Z}_1\ \mathbf{I}$, e atendendo a que $\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_{1H} + \mathbf{Z}_{1A}$, isto é, $\mathbf{Z}_{1H} = (\mathbf{Z} + \mathbf{Z}_t^*)/2$, vem

$$P = \mathbf{I}_{1t}^*\ \mathbf{Z}_{1H}\ \mathbf{I}_1 . \tag{47}$$

Anàlogamente, como a potência aparente $S = \mathbf{V}_{1t}^*\ \mathbf{Y}_{1t}\ \mathbf{V}_1$, deduz-se uma expressão equivalente para a potência activa em função da matriz das admitâncias à entrada da linha, sendo portanto análogas as condições matemáticas para as formas hermíticas $\mathbf{Z}_{1H}$ e $\mathbf{Y}_{1H}$ para que correspondam a uma rede passiva.

A condição física de passividade exige que $P > 0$ ou $P \geqslant 0$. Assim, exceptuando o caso em que $\mathbf{I}_1 = \mathbf{0}$ para o qual toda a forma hermítica é idênticamente nula, será (na hipótese $\mathbf{I}_1 \neq \mathbf{0}$)

$P > 0$ : matriz definida positiva

$P \geqslant 0$ : matriz semi-definida positiva

$P < 0$ : matriz definida negativa

$P \leqslant 0$ : matriz semi-definida negativa

$-\infty < P < +\infty$ : matriz indefinida.

Então a *condição matemática, necessária mas não suficiente, de passividade* exige que a parte hermítica da matriz das impedâncias (ou das admitâncias) à entrada da linha seja definida positiva ou semi-definida positiva.

Por outro lado, é condição necessária e suficiente para que uma matriz hermítica seja definida positiva que todos os seus valores próprios sejam reais positivos e para que seja semi-definida positiva que alguns valores próprios sejam positivos e outros nulos.

O critério estabelecido é no entranto mais fácil de verificar através de certos determinantes: a condição necessária e suficiente para que uma matriz hermítica seja definida positiva é que todos os determinantes principais que se podem extrair da matriz sejam positivos (teorema de Sylvester).

Mas uma matriz hermítica semi-definida positiva é singular e portanto os seus determinantes principais não são todos positivos, definindo-se então o critério seguinte: a condição necessária e suficiente para que uma matriz seja semi-definida positiva é que, após permutação eventual das linhas e das colunas, os determinantes principais de ordem crescente sejam positivos até à ordem r, sendo todos os outros nulos, dizendo-se nestas circunstâncias que a matriz é semi-definida positiva de ordem r.

### 3.2 — Matriz das constantes de propagação

Na linha passiva desaparece a ambiguidade do sinal das matrizes $\Gamma$ e $\Gamma'$ introduzida pela extracção da raiz quadrada na sua definição [1]. Realmente os sinais devem ser tais que $Z_0$ seja a matriz de uma linha passiva. Para isto é necessário que os valores próprios de $\Gamma$ correspondam aos únicos amortecimentos e desfasagens fisicamente possíveis.

Dados Z e Y calcula-se a matriz $\Gamma^2 = Z\,Y$ e os valores próprios da matriz $\Gamma^2$ dados por

$$\det\,(\Gamma^2 - \lambda) = 0 \tag{48}$$

que define um polinómio de grau m em $\lambda$ e portanto a equação característica cujas m raízes são os valores próprios da matriz $\Gamma^2$. Utilizando uma transformação de semelhança da matriz $\Gamma^2$ por meio da matriz L obtém-se a matriz $\Lambda$ semelhante à matriz $\Gamma^2$

$$L^{-1}\,\Gamma^2\,L = \Lambda \tag{49}$$

onde $\Lambda$ é uma matriz diagonal. Então $\Gamma^2 = L\,\Lambda\,L^{-1}$ e portanto

$$\Gamma = L\,\Lambda^{\frac{1}{2}}\,L^{-1} \tag{50}$$

sendo $\Lambda^{1/2}$ uma matriz diagonal cujos elementos da diagonal principal são as raízes quadradas dos valores próprios de $\Gamma^2$, isto é, $\pm\sqrt{\lambda_k}$ com $k = 1,2,\ldots,m$, e os restantes nulos. A escolha dos sinais deve corresponder ao amortecimento crescente com x para todas as funções próprias, sendo portanto os valores positivos.

### 3.3 — Matriz das impedâncias de onda

Como se referiu pode definir-se a matriz das impedâncias de onda como a matriz das impedâncias à entrada de uma linha infinita.

Sejam n *linhas finitas em cadeia*, com a matriz das impedâncias de onda das tensões $Z_0$ e a matriz das constantes de transmissão G. De (23) deduz-se que a matriz das impedâncias à entrada da cascata de linhas iguais em vazio será $Z_{1v} = (\mathrm{cth}\,n\,G)\,Z_0$, e em curto-circuito $Z_{1k} = (\mathrm{th}\,n\,G)\,Z_0$.

Fazendo tender o número n de células para infinito a matriz de impedâncias à entrada de uma *linha uniforme infinita* é, em vazio,

$$Z_{1v\infty} = \lim_{n\to\infty}\,(\mathrm{cth}\,G)\,Z_0 \tag{51}$$

e em curto-circuito

$$Z_{1k\infty} = \lim_{n\to\infty}\,(\mathrm{th}\,n\,G)\,Z_0\,. \tag{52}$$

No caso de existência de passividade as matrizes Z e Y satisfazem às condições de matriz definida positiva, assim como a matriz $Z_0$. Nestas circunstâncias verifica-se a convergência das relações anteriores pois

$$\lim_{n\to\infty}\,(\mathrm{cth}\,n\,G) = \lim_{n\to\infty}\,(\mathrm{th}\,n\,G) = 1 \tag{53}$$

como se pode verificar, por exemplo, pela relação $\mathrm{th}\,n\,G = (I - (\mathrm{ch}\,n\,G)^{-2})^{1/2}$. Em conclusão

$$Z_0 = Z_{1v\infty} = Z_{1k\infty} \tag{54}$$

que exprime o *significado da matriz das impedâncias de onda* como sendo a matriz das impedâncias à entrada de uma linha infinita passiva.

Note-se que pode haver casos em que a matriz das impedâncias de onda indica o caracter passivo da linha sem que existam os limites (53).

## 4 — LINHA COM RECIPROCIDADE

### 4.1 — Condição de Reciprocidade

No caso de uma linha exclusivamente constituída por dipolos (resistência, capacidade e auto-indução) e por transformadores com relações de transformação reais, as matrizes impedância e admitância aos terminais da linha são simétricas.

A reciprocidade de uma linha traduz-se matemàticamente pela simetria das matrizes impedância e admitância aos terminais, $Z = Z_t$ e $Y = Y_t$, tendo como consequência a simetria das matrizes das impedâncias unitárias e das admitâncias unitárias dada a simetria longitudinal.

O princípio de reciprocidade só se aplica a linhas em que as perdas joule, a energia magné-

tica e a energia electrostática sejam funções de estado para todos os valores instantâneos das tensões e das correntes aos terminais [2].

### 4.2 — Impedâncias de onda

Como $\mathbf{Z}$ e $\mathbf{Y}$ são matrizes simétricas verifica-se

$$\mathbf{Z}\,\mathbf{Y} = (\mathbf{Y}\,\mathbf{Z})_t \tag{55}$$

e portanto

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}'_{0t} \tag{56}$$

quer dizer, as matrizes das impedâncias de onda das tensões e das correntes não simétricas.

Por outro lado, a simetria de $\mathbf{Z}$ e de $\mathbf{Y}$ implica a simetria de $\mathbf{Z}_0$, pois

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_0 &= \mathbf{Z}\,(\mathbf{Y}\,\mathbf{Z})^{-1/2} = \\ &= \mathbf{Z}_t(\mathbf{Y}_t\,\mathbf{Z}_t)^{-1/2} = \\ &= \mathbf{Z}\,(\mathbf{Z}\,\mathbf{Y})^{-1/2} = \\ &= ((\mathbf{Z}\,\mathbf{Y})^{-1/2}\,\mathbf{Z})_t = \\ &= \mathbf{Z}_{0t}. \end{aligned} \tag{57}$$

Este resultado era de prever conjugando (56) com $\mathbf{Z}_0 = \mathbf{Z}'_0$.

Note-se que a simetria de $\mathbf{Z}$ e $\mathbf{Y}$ não implica a comutatividade $\mathbf{Z}\,\mathbf{Y} = \mathbf{Y}\,\mathbf{Z}$ pois o produto de duas matrizes simétricas não é em geral uma matriz simétrica. Mas os produtos de duas matrizes simétricas têm a mesma equação característica e portanto os mesmos valores próprios, propriedade muito importante para simplificação dos cálculos numéricos.

### 4.3 — Constantes de propagação

Quando as matrizes e $\mathbf{Z}\,\mathbf{Y}$ são simétricas a matriz das constantes de propagação das correntes é a transposta da matriz das constantes de propagação das tensões e portanto também são simétricas

$$\begin{aligned} \Gamma' &= (\mathbf{Y}\,\mathbf{Z})^{1/2} = \\ &= (\mathbf{Y}_t\,\mathbf{Z})^{1/2} = \\ &= ((\mathbf{Z}\,\mathbf{Y})^{1/2})_t = \\ &= \Gamma_t \end{aligned} \tag{58}$$

e por raciocínio análogo

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_t \tag{59}$$

### 4.4 — Passividade

Numa linha com reciprocidade a parte hermética da impedância aos terminais coincide com a sua parte real pois a transposição não as modifica

$$\mathbf{Z}_{1H} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_1^*\right) = \mathrm{Re}\,\mathbf{Z}_1 = \mathbf{R} \tag{60}$$

e portanto a passividade da linha será determinada pelos valores próprios de $\mathbf{R}$.

## 5 — CONCLUSÕES

A teoria das linhas polifásicas revela que uma linha uniforme e linear apresenta *simetria longitudinal* e goza das seguintes propriedades:

*a*) As matrizes das impedâncias de onda das tensões e das correntes são iguais ($\mathbf{Z}_0 = \mathbf{Z}'_0$);

*b*) As matrizes das constantes de transmissão das tensões e das intensidades são iguais ($\mathbf{G} = \mathbf{G}'$);

*c*) As matrizes das constantes de propagação das tensões e das intensidades são iguais ($\Gamma = \Gamma'$);

*d*) As matrizes de transferência referida às grandezas das tensões e das correntes são iguais ($\mathbf{T} = \mathbf{T}'$).

A *passividade* conduz à univocidade de cálculo da matriz das constantes de propagação e permite definir a matriz das impedâncias de onda como a matriz das impedâncias à entrada de uma linha infinita.

A *reciprocidade* implica propriedades de simplificação no estudo e cálculo quer das impedâncias de onda quer das constantes de propagação.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS


[1] — H. DUARTE-RAMOS: Linhas polifásicas uniformes e lineares em funcionamento sinusoidal permanente equilibrado. I — Teoria Geral, Técnica n.º 396 (1970) p. 299.

[2] — H. EDELMANN: Berechnung Elektrischer Verbundnetze, Springer (1963).

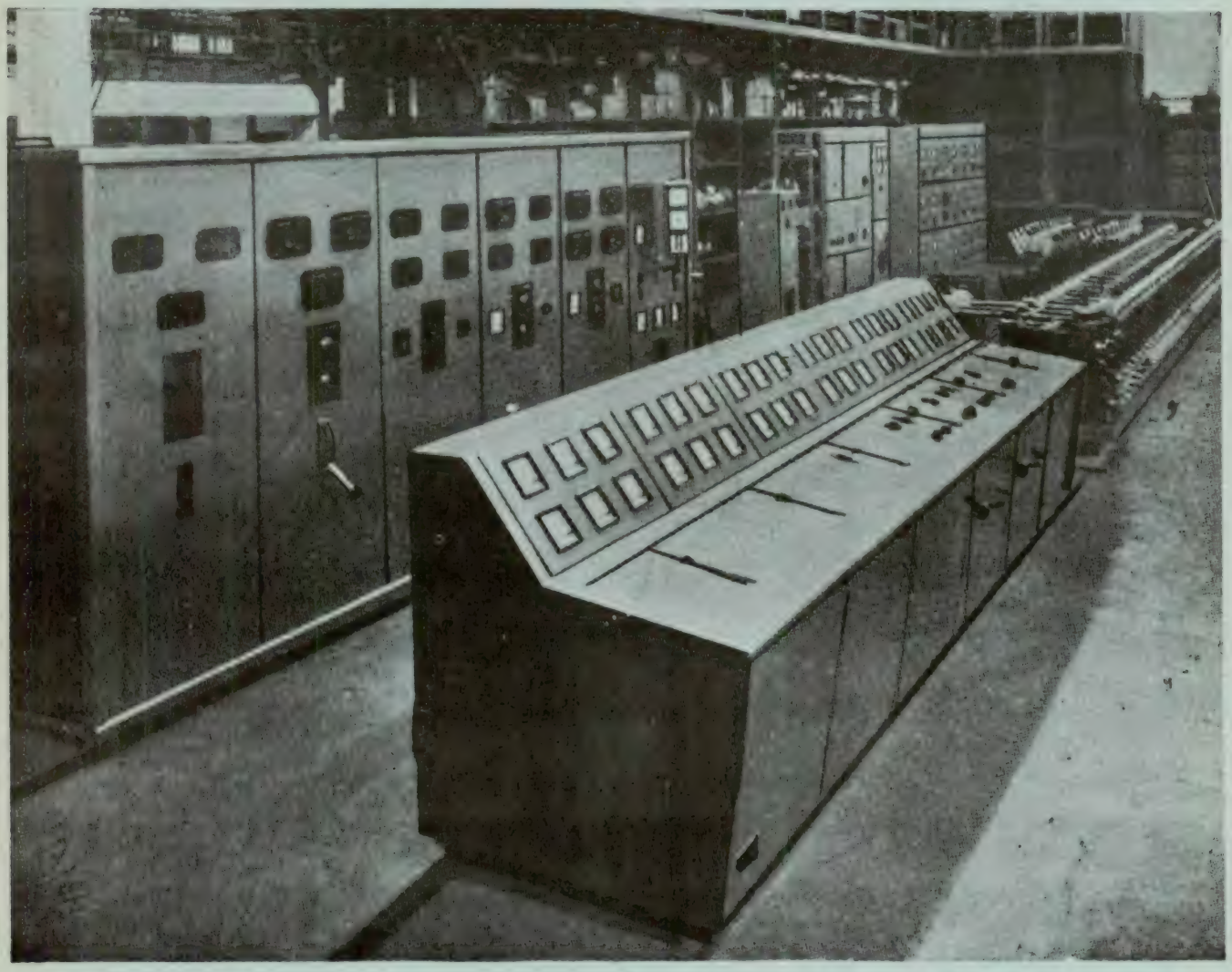
# JAYME DA COSTA, L^DA

MECÂNICA E ELECTRICIDADE EM TODAS AS APLICAÇÕES

PORTO
Praça da Batalha, 12
Telef. 2 28 12 (PPC)

LISBOA
Rua dos Correeiros, 14
Telef. 32 70 35 (PPC)

LUANDA
Cx. Postal 5174
Telef. 4743



**Material fabricado nas nossas oficinas, pronto para expedição**

- Fabricação de aparelhagem eléctrica de alta e baixa tensão
- Equipamentos electromecânicos completos para centrais e fábricas
- Postos de transformação tipo monobloco
- Quadros blindados, capsulados e em armário
- Armaduras de iluminação de todos os tipos
- Contadores eléctricos e instrumentos de medida
- Telemedida e telecomando
- Instalações elevatórias de água
- Instalações de saneamento e esgotos
- Ferramentas de corte
- Motores Diesel industriais e marítimos
- Fogões eléctricos
- Frigoríficos
- Ventilação e condicionamento de ar
- Aparelhagem de Raios X e electromedicina

# ARMADURA DE ILUMINAÇÃO

TIPO **HI·1**

1 — LÂMPADA:
Incandescência até 100 watts e vapor de mercúrio 50 wtts.

2 — ACABAMENTO:
Impecável, como só o alumínio injectado permite; resistente à corrosão.

3 — DIMENSÕES MÁXIMAS EXTERIORES:
226 x 126 x 126 mm.

4 — PESO:
1 Kg.

**CONSTRUÇÕES ELÉCTRICAS SCHRÉDER, LDA.**

P. JOSÉ FONTANA, 25 LISBOA-1 · TEL. 561001

C. D. U. 624.131.25 : 518.5

# COMPUTER CALCULATION OF STRESSES AND ROCK FAILURE ANALYSIS IN SOME BLASTING SITUATIONS

By CARLOS DINIS DA GAMA (*)

RESUMO

*Vários programas de computação são apresentados para o cálculo de tensões induzidas no interior de rochas submetidas à detonação de cargas explosivas esféricas e cilíndricas. Analisam-se diversas geometrias e as distribuições de tensões são obtidas em função do tempo. A energia de deformação associada à onda de choque emitida é considerada e apresenta-se também um programa de computação para a mesma. A análise da rotura da rocha é estabelecida com base num critério dinâmico digno de confiança. Os resultados obtidos estão em concordância com dados conhecidos de arranque de rochas em trabalhos mineiros e experimentais.*

SYNOPSIS

*Various computer programs are reported for the calculation of stresses within a rock mass subjected to the detonation of spherical and cylindrical charges of explosive. Different geometries are analysed and stress distributions are obtained as transient solutions. Reference is made to the radial strain energy associated to the stress wave coming out of the detonation and a computer program is also presented for its calculation.*

*Rock failure analysis is deduced in terms of a reliable dynamic failure criterion. Results agree with known data from mining and experimental blasting operations.*

## 1 — INTRODUCTION

The stresses induced in the rock surrounding a concentrated charge of explosive, after its detonation, can be determined by means of the mathematical theory of elasticity with good approximation, because in such cases the deviations from perfectly elastic behavior are small. The usual approximations of elastic wave theory are valid for most materials and most problems.

This type of stress analysis was first deduced for the case of the explosion of a confined charge within a rock mass ([1]) and latter for the same phenomenon, but in the vicinity of one free face ([2]).

Therefore, a computer program was reported ([3]) in view of the complexity and mass of calculations necessary to accomplish the stress determination for the second of those cases.

More recently, a very important hypothesis have been introduced in the theory of blasting ([4]) by means of which a cylindrical charge of explosive is assumed to be equivalent in effect to a composite of concentrated charges. Essentially, the stress pulse from a cylindrical charge is simulated by the superposition of elemental stress pulses coming from a line of concentrated charges that make up the cylindrical charge. This assumption, in which theoretical treatment has produced good results in agreement with experimental field work ([5]) provides a good basis for the mathematical treatment of the problem, suggesting its application in new methods of design blasting patterns, featuring column charges, by far the most employed procedure in practice.

This paper presents the extension of the referred computer program to the case of a cylindrical charge detonating in the vicinity of two free faces of rock, (the so called bench blasting), assuming that composition of effects. The transition is achieved through an intermediate step, describing the case of a spherical charge detonating near two free faces. This phase was developed more in connection to the assessment of the mathematical model of wave reflection, rather than some possible practical applications.

In all the cases, the purpose of the method consists in establishing the induced stress distribution (represented by the magnitudes and directions of the principal stresses) over small increments of time. Then, the correlation with an appropriate rock failure criterion (maximum

(*) Graduate Student, University of Minnesota
Lecturer, University of Luanda
Scholar, Gulbenkian Foundation

dynamic tensile strength of the material) is set up for the prediction of the produced fractures and crater boundaries.

Results show good agreement with known values from practical cases of mining and both the laboratory and field experiments reported in the bibliography.

In particular, we emphasize the enormous capability of the computer in order to obtain the different stress distributions when slight changes in the input data are introduced. This procedure is extremely convenient to investigate the separate influence of the various parameters in the phenomenon, indicating clear trends for studies of optimization, as well as supplying valuable information for the explanation of mechanisms of rock fracture, as transient situations.

Therefore, the method can provide an important tool for the scientific design of blasting operations.

## 2 — DETONATION OF A SPHERICAL CHARGE IN AN INFINITE MASS OF ROCK

Considering a homogeneous, elastic and infinite mass of rock within which detonates a spherical charge of explosive, the principal resultant stress wave is a longitudinal wave propagated through the surrounding medium with a velocity $C_p$, characteristic of the rock.

Using polar coordinates centered at the charge center E, each point A in the rock mass is subjected to a certain displacement U, with the components (Fig. 1):

$$U_r = U(r,T)$$
$$U_\theta = U_t = 0$$

T represents the time from the instant of detonation and r the distance EA.

The theory of elasticity shows that the stresses at the point A are defined by

$$\sigma_r = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial U}{\partial r} + 2\lambda\frac{U}{r}$$

$$\sigma_\theta = \sigma_t = \lambda\frac{\partial U}{\partial r} + 2(\lambda+\mu)\frac{U}{r}$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta t} = \tau_{tr} = 0$$

where $\lambda$ and $\mu$ are the Lamé's constants of the rock.

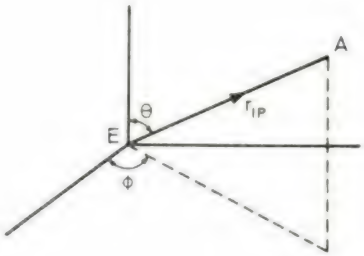



Fig. 1 — Polar coordinates of a point A in the interior of the rock mass.

The displacement changes with time can be expressed as the product

$$U_r = U(r,T) = U_p(r).Uw(T)$$

where $U_p(r)$ represents the peak value of the particle displacement, which is a function of the distance r, and Uw(T) is the change in displacement with time, commonly known as the wave shape for displacement.

The arrival of the longitudinal wave to the point A will take place in the instante $T_{ip}$ (i stands for incident and p for P-wave) where

$$T_{ip} = T - \frac{r}{C_p}$$

and the corresponding stresses are, using the same notation

$$\sigma_{rip} = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial U(r,T_{ip})}{\partial r} + 2\lambda\frac{U(r,T_{ip})}{r}$$

$$\sigma_{\theta ip} = \sigma_{tip} = \lambda\frac{\partial U(r,T_{ip})}{\partial r} + 2(\lambda+\mu)\frac{U(r,T_{ip})}{r}$$

$$\tau_{r\theta ip} = \tau_{\theta tip} = \tau_{trip} = 0$$

The derivative terms can be written:

$$\frac{\partial U(r,T_{ip})}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}[U_p(r).Uw(T_{ip})] =$$

$$= \frac{dU_p(r)}{dr}Uw(T_{ip}) + \frac{\partial Uw(T_{ip})}{\partial r}U_p(r)$$

and the last term can be transformed because

$$\frac{\partial Uw(T_{ip})}{\partial r} = \frac{d\,Uw(T_{ip})}{d\,T_{ip}} \frac{\partial T_{ip}}{\partial r}$$

$$= \frac{d\,Uw(T_{ip})}{d\,T_{ip}} \frac{\partial T_{ip}}{\partial T} \left( - \frac{1}{C_p} \right)$$

$$= - \frac{1}{C_p} \frac{d\,Uw(T_{ip})}{d\,T_{ip}}$$

Introducing the radial particle velocity

$$V(r, T_{ip}) = \frac{\partial U(r, T_{ip})}{\partial T}$$

and substituting, we obtain

$$\frac{\partial U(r, T_{ip})}{\partial r} = \frac{d U_p(r)}{dr} Uw(T_{ip}) - \frac{V(r, T_{ip})}{C_p}$$

Thus, the stresses at the point A, such that $r = EA$, are:

$$\sigma_{rip} = (\lambda + 2\mu) \left[ \frac{d U_p(r)}{dr} Uw(T_{ip}) - \frac{V(r, T_{ip})}{C_p} \right] + 2\lambda \frac{U(r, T_{ip})}{r}$$

$$\sigma_{\theta ip} = \sigma_{tip} = \lambda \left[ \frac{d U_p(r)}{dr} Uw(T_{ip}) - \frac{V(r, T_{ip})}{C_p} \right] + 2(\lambda + \mu) \frac{U(r, T_{ip})}{r}$$

$$\tau_{r\theta ip} = \tau_{\theta tip} = \tau_{trip} = 0$$

Because of the absence of shear stresses, $\sigma_{rip}$, $\sigma_{\theta ip}$, and $\sigma_{tip}$ are principal stresses.

It is then necessary to define the quantities $U_p$, Uw and V, including their variation with time and distance.

The attenuations of maximum displacement and maximum particle velocity are known to follow inverse power functions of the distance. Theoretically, in a perfect homogeneous medium the decay of stress waves is found to be exponential, with a coefficient dependent on the internal friction of the solid.

In blasting, these exponents (m and n) have larger values in the vicinity of the shot point, but with reasonable approximation the following laws are valid. ([4])

$$U(r, T_{ip}) = A_o\, r^{-n}\, Uw(T_{ip})$$

$$V(r, T_{ip}) = B_o\, r^{-m}\, Vw(T_{ip})$$

where $A_o$ and $B_o$ are constants (intercepts) and $Vw(T_{ip})$ is the change in particle velocity with time (wave shape).

It is evident that

$$U_p(r) = A_o\, r^{-n}$$

and

$$V_p(r) = B_o\, r^{-m}$$

and these are the necessary relationships for the stress calculations, providing that the experimental measurements give reliable values for the constants involved.

A good description of the techniques and results obtained for this purpose is found in (3) and it makes possible to accomplish the numerical calculations. A summary of the field conditions and characteristic parameters is presented next.

The rock is a ferrous ore (mainly composed by magnetite and specularite) with an average specific gravity of 3.8 g/cm$^3$ and the explosive selected is Geogel 60 % characterized by a detonation velocity of $6.3 \times 10^5$ cm/sec.

Time dependent displacement and particle velocity in that roch were obtained from field array experiments. Table No 1 gives the principal data needed for the calculations.

TABLE No 1

| Variable | Fortran Symbol | Value | Description |
|---|---|---|---|
| $C_P$ | CP | $6.4 \times 10^5$ cm/s | Velocity of propagation of the longitudinal waves |
| $C_S$ | CS | $3.42 \times 10^5$ cm/s | Velocity of propagation of the shear waves |
| $\lambda$ | AL | $6.25 \times 10^{11}$ dyne/cm$^2$ | First Lamé parameter for the rock |
| $\mu$ | AM | $4.15 \times 10^{11}$ dyne/cm$^2$ | Second Lamé parameter or shear modulus of the rock |
| $A_0$ | AO | 40.3 cm | Displacement intercept (for Geogel 60 %) |
| $B_0$ | BO | $3.36 \times 10^5$ cm/s | Particle velocity intercept (for Georgel 60 %) |
| n | EN | 1.4 | Decay exponent of radial displacement in the longitudinal wave |
| m | EM | 1.4 | Decay exponent of particle velocity in the longitudinal wave |
| h | EH | 1. | Decay exponent for displacement in the shear wave |
| k | EK | 1. | Decay exponent for particle velocity in the shear wave |

The wave shapes for displacement Uw and for particle velocity Vw characteristic of the stress wave induced by a shot of Geogel 60 % within that rock, are depicted in Fig. 2. These data were obtained [3] after the recording of oscillogram traces and revealed a small variation in the wave shapes with distance. Therefore, we assume that they represent with sufficient accuracy the corresponding functions over a wide range of distances from the shot point.

According to this set of elements, a computer program was established (Program NORE) and it is presented in the Appendix 1.

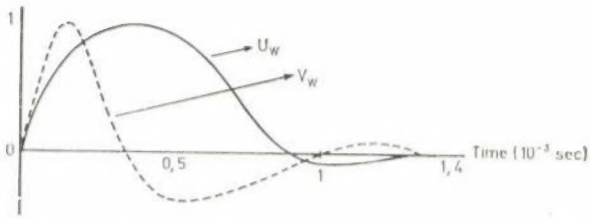



Fig. 2 — Wave shapes for displacement (Uw) and for particle velocity (Vw) used in the computer program.

Various distances to the center of the detonating charge were considered in the rock for the sake of calculation of the principal stresses, over 30 equal time increments, each one of $10^{-4}$ seconds. Tension is regarded as positive and compression as negative stress.

Fig. 3 contains the conclusions of the output data for induced stresses in function of time and at increasing distances from the shot point.

The radius of the spherical cavity containing the explosive is 8.2 cm (3 1/4") for this and the next blasting situations.

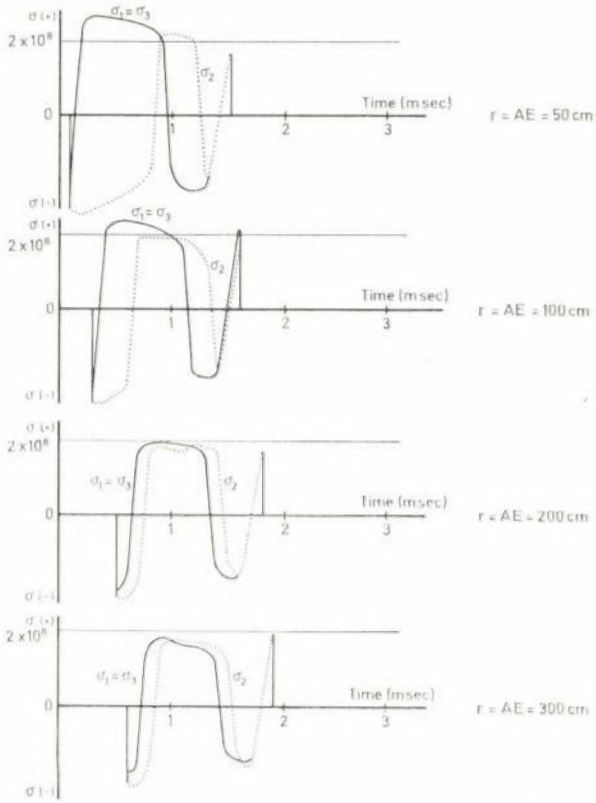



Fig. 3 — Stress distribution variation with time at different distances from the explosive charge.

In each of the diagrams, the maximum dynamic tensile strength of the rock ($200 \times 10^6$ dyne/cm$^2$) is referred, according to (3).

The extension of fractures with time is assumed to follow the path of sucessive points where the value of that strength is exceeded. The cracks follow the direction of $\sigma_1$ when $\sigma_2$ is greater than the dynamic tensile strength, and they terminate when these values are equal. By means of this assumption, that provides good correlation with the results of blasting tests ([2]), ([3]) it is possible to predict the extension of the fractured zone of rock surrounding the shot, as well as the crater shape and volume, when free faces are in the proximity of it.

An interesting correlation between the extension of radial cracks and the strain energy associated with the stress wave coming out of the detonation, can also be deduced from the computer program.

The radial strain energy $W_r$ radiated outward per unit area at the instant t is ([6]), ([7]):

$$W_r = \frac{\rho C_P^3}{2} \int_0^t \varepsilon_r^2 \, dt$$

where $\rho$ is the material density, $C_p$ the longitudinal propagation velocity and $\varepsilon_r$ the radial strain induced, in this case given by:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial U_r}{\partial r} =$$

$$= \frac{d U_p(r)}{d r} U w (T_{ip}) - \frac{V(r, T_{ip})}{C_P}$$

For a certain distance r from the shot point, the total radial strain energy is:

$$W_t = 4 \pi r^2 W_r$$

and if r represents the radius of the spherical volume cracked around the shot (sometimes called equivalent cavity) we obtain the amount of strain energy required for the radial cracking mechanism produced by the stress wave.

From the results of the program NORE and after the application of the tensile strength criterium this radius is known to be approximately $r = 190$ cm, and at this point the corresponding instant when the maximum tensile stress induced exceeds the dynamic tensile strength of the rock is $t = 7.0 \times 10^{-4}$ seconds.

These quantities and the values of $\rho$ and $C_p$ mentioned obove yield for $W_r$ the amount of $1.432 \times 10^{11}$ erg/cm$^2$ and a total strain energy required to fracture the rock within the equivalent cavity, of $W_t = 6.491 \times 10^{16}$ erg.

The complete calculation of strain energy was also obtained for a wide range of distances from the charge and over 30 increments of time for each of the distances. The program is also presented in the Appendix 1 — Part II (program ENERGY).

It can be assumed from the analysis of the output data that the constant decrease of strain energy with distance for the same instants, coupled with the empirical evidence of crack development, suggests the existence of a critical strain energy below which the fracturing stops.

The variations strain energy-time for various distances from the shot point are presented in Fig. 4. The assumed maximum distance of fracture is plotted, and it separates the two regions of the rock mass.

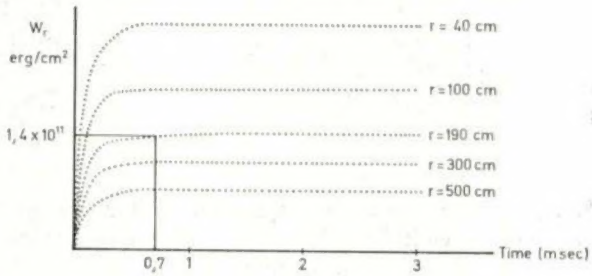



Fig. 4 — Strain energy variation with time and distance.

The subcritical values of the strain energy are related with zones of the rock mass where the rock remains intact. Therefore, the two criteria of failure can provide, independently, the information needed for fracture prediction when their values are compared with some critical characteristic parameters of the rock.

In particular, if the critical strain energy is known a priori, it could be used in a much more reliable way to predict crack extension, than the dynamic strength alone.

## 3 — DETONATION OF A SPHERICAL CHARGE IN THE VICINITY OF ONE FREE FACE (CRATERING)

The method of stress analysis reported[2] for the calculation of magnitude and direction of the principal stresses in the case of blasting with a spherical charge near a free face of rock, uses the plane wave reflection theory. Again, the deviations from the real case of spherical waves are not important in view of the relatively reduced distances of propagation involved in this case.

The stress at any point A within the rock can be synthesized by transferring the stresses due to the incident longitudinal wave, the stress due to the reflected longitudinal wave and the ones due to the reflected shear wave. As these three waves arrived at A in distinct instants (and following that order), the respective composition is done with consideration of their correspondent times of arrival to the point.

The situation is presented in Fig. 5.

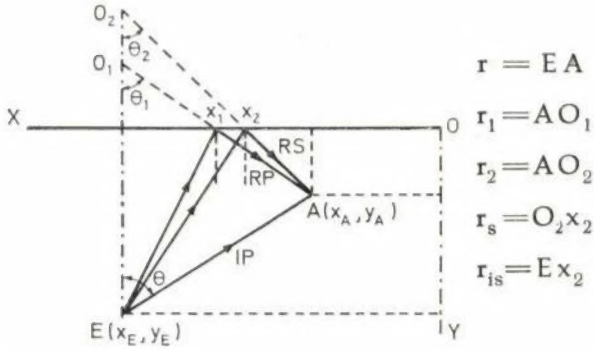



Fig. 5 — Polar coordinates system used for the case of blasting with one free face (free face is the plane $y = 0$).

The stresses caused by IP were deduced in Section 2. For the two reflected waves that reach any point A situated in the interior of the rock mass, specific expressions are available.

The reflected longitudinal wave (referred to by the subscript RP) has an angle of reflection equal to the angle of incidence, and its point of incidence is defined by the coordinates $(x_1, 0)$ where $x_1$ is easily found to be

$$x_1 = \frac{y_A x_E + y_E x_A}{y_E + y_A}$$

and by the angle (see Fig. 5)

$$\theta_1 = \text{arc tg} \frac{x_E - x_1}{y_E}$$

Now, the polar coordinates of A are $(r_1, \theta_1, \phi_1)$ in relation to the point $0_1$ situated at the intersection of the normal to the free face passing through E with the projection of the reflected longitudinal wave.

The stresses resulting from RP are then calculated with relation to $0_1$, using the relationships from the theory of elasticity: [3]

$$\sigma_{rrp} = (\lambda + 2\mu)\left[\frac{\partial U_{pl}(r_1, \theta_1)}{\partial r_1} Uw_1(T_{rp}) - \frac{V_1(r_1, \theta_1, T_{rp})}{C_P}\right] + 2\lambda \frac{U_1(r_1, \theta_1, T_{rp})}{r_1}$$

$$\sigma_{\theta rp} = \sigma_{\phi rp} = \lambda\left[\frac{\partial U_{pl}(r_1, \theta_1)}{\partial r_1} Uw_1(T_{rp}) - \frac{V_1(r_1, \theta_1, T_{rp})}{C_P}\right] + 2(\lambda + \mu)\frac{U_1(r_1, \theta_1, T_{rp})}{r_1}$$

$$\tau_{r\theta rp} = \frac{\mu}{r} \frac{\partial U_{pl}(r_1, \theta_1)}{\partial \theta_1} Uw_1(T_{rp})$$

$$\tau_{\theta\phi rp} = \tau_{r\phi rp} = 0$$

The functions are calculated for the instant

$$T_{rp} = T - \frac{r_1}{C_P}$$

where $r_1 = AO_1$, and they have the expressions

$$U_1(r_1, \theta_1, T_{rp}) = A_{rp}(\theta_1) . A_o r^{-n} . Uw_1(T_{rp})$$

$$V_1(r_1, \theta_1, T_{rp}) = A_{rp}(\theta_1) . B_o r^{-m} . Vw_1(T_{rp})$$

where $A_{rp}$ is a function of $\theta_1$ that indicates the ratio between the amplitudes of RP and IP waves at the free face:

$$A_{rp}(\theta_1) = \frac{\sin 2\theta_1 \sin 2j - (C_P/C_S)^2 \cos^2 2j}{\sin 2\theta_1 \sin 2j + (C_P/C_S)^2 \cos^2 2j}$$

and

$$\sin j = \frac{C_P}{C_S} \sin \theta_1$$

The wave shapes $Uw_1$ and $Vw_1$ are identical to the same functions of the incident wave, because the theory of reflection of elastic waves states the invariance of waves shapes with respect to reflections.

Finally, let us consider the third wave encountering the point A, which stresses are characterized by the subscript RS. The laws of reflection give for this case the position of the point of incidence defined by $(0,x_2)$ where

$$x_2 < x_1$$

because $C_S < C_P$.

The conditions for the determination of $x_2$ as well as the angle $\theta_2$ are:

$$\operatorname{tg} \theta_2 = \frac{x_2 - x_A}{y_A}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{x_E - x_2}{y_E}$$

$$\sin \alpha_2 = \frac{C_P}{C_S} \sin \theta_2$$

where $\alpha_2$ is the angle of incidence by means of which one stress wave departing from E is reflected in the direction of A, as a shear wave.

Those three relationships constitue a system of 3 equations with 3 unknowns ($\theta_2$, $\alpha_2$ and $x_2$) that is solved in the computer program by means of a simple bracketing method.

This system of polar coordinates will now be centered at $0_2$ (see Fig. 5) and each point in the plane has three components $r_2$, $\theta_2$, $\phi_2$. The time for arrival of the waves is

$$T_{rs} = T - \frac{r_{is}}{C_P} - \frac{r_2 - r_s}{C_S}$$

and the corresponding stresses are given by:

$$\sigma_{rrs} = \lambda \frac{U_{\theta w}(T_{rs})}{r_2} \left[ \frac{\partial U_{\theta p}(r_2, \theta_2)}{\partial \theta_2} + \right.$$

$$\left. + U_{\theta p}(r_2, \theta_2) \operatorname{cotg} \theta_2 \right]$$

$$\sigma_{\theta rs} = \frac{U_{\theta w}(T_{rs})}{r_2} \left[ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial U_{\theta p}(r_2, \theta_2)}{\partial \theta_2} + \right.$$

$$\left. + \lambda U_{\theta p}(r_2, \theta_2) \operatorname{cotg} \theta_2 \right]$$

$$\sigma_{trs} = \frac{U_{\theta w}(T_{rs})}{r_2} \left[ \lambda \frac{\partial U_{\theta p}(r_2, \theta_2)}{\partial \theta_2} + \right.$$

$$\left. + (\lambda + 2\mu) U_{\theta p}(r_2, \theta_2) \operatorname{cotg} \theta_2 \right]$$

$$\tau_{r\theta rs} = \mu \left[ \frac{\partial U_{\theta p}(r_2, \theta_2)}{\partial r_2} U_{\theta w}(T_{rs}) - \right.$$

$$- \frac{V_{\theta p}(r_2, \theta_2)}{C_P} V_{\theta w}(T_{rs}) -$$

$$\left. - \frac{U_{\theta p}(r_2, \theta_2)}{r_2} U_{\theta w}(T_{rs}) \right]$$

$$\tau_{\theta trs} = \tau_{rtrs} = 0$$

The displacement and particle velocity functions are in this case:

$$U_\theta(r_2, \theta_2, T_{rs}) = A_{rs}(\theta_2) A_o r_{is}^{-n} \left(\frac{r_s}{r_2}\right)^h U_{\theta w}(T_{rs})$$

$$V_\theta(r_2, \theta_2, T_{rs}) = A_{rs}(\theta_2) B_o r_{is}^{-m} \left(\frac{r_s}{r_2}\right)^k V_{\theta w}(T_{rs})$$

where

$$A_{rs}(\theta_2) = \frac{\frac{C_P}{C_S} 2 \sin 2i \cos 2\theta_2}{\sin 2i \sin 2\theta_2 + \left(\frac{C_P}{C_S}\right)^2 \cos^2 2\theta_2}$$

$$\sin i = \frac{C_P}{C_S} \sin \theta_2$$

and the following condition is valid

$$U_w = U_{wl} = U_{\theta w}$$
$$V_w = V_{wl} = V_{\theta w}$$

meaning that the wave shape does not change on reflection.

The next step in the stress calculation is to obtain the values to a common origin E. This